Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Lad (M,d) betegne et metrisk rum.

1° Om en mængde $A \subseteq M$ antages, at den er overdækket af endeligt mange kugler $K(c_i, r_i)$, $i = 1, \cdots, n$, altså $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K(c_i, r_i)$. Vis, at A er begrænset.

2° Antag, at $A_1, \cdots, A_n$ er begrænsede delmængder af M. Vis, at $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ er begrænset.

En mængde $A \subseteq M$ kaldes *totalt begrænset*, hvis den for hvert $\varepsilon > 0$ kan overdækkes med endeligt mange ε-kugler, altså såfremt der gælder

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N} \, \exists c_1, \cdots, c_n \in M : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K(c_i, \varepsilon) \ .$$

3° Vis, at en totalt begrænset mængde A er begrænset.

4° Lad $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ være uniformt kontinuert, idet (X, d_X) og (Y, d_Y) er metriske rum. Vis, at hvis $A \subseteq X$ er totalt begrænset, så er $f(A)$ totalt begrænset i (Y, d_Y).

Opgave 2

Lad $f \in \mathcal{L}_2([0,\infty[)$ med hensyn til Lebesgue målet på $[0,\infty[$.

1° Vis, at funktionen $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \geq 0$, er veldefineret og kontinuert.

2° Vis ved Cauchy-Schwarz' ulighed, at

$$|F(x)| \leq \sqrt{x} \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \ , \ x > 0 \, ,$$

og slut at

$$\lim_{x \to 0+} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = 0 \ .$$

3° Vis, at der for $0 < a < x$ gælder

$$\left| \frac{F(x)}{\sqrt{x}} - \frac{F(a)}{\sqrt{x}} \right|^2 \leq \left(1 - \frac{a}{x} \right) \int_a^\infty |f(t)|^2 dt \ .$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

4° Vis, at $\lim_{a\to\infty}\int_a^\infty |f(t)|^2 dt = 0$, og vis dernæst ved hjælp af uligheden fra 3° at

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{\sqrt{x}} = 0\,.$$

Opgave 3

Lad

$$f(z) = \frac{(16z^2-\pi^2)(1+\sqrt{2}\cos z)}{\cos 2z}\,.$$

1° Gør rede for, at $f(z)$ er en meromorf funktion på $\mathbb{C}$. Bestem samtlige poler og disses orden.

2° Begrund, at f har en potensrækkefremstilling $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ i en omegn af $z=0$, og bestem denne rækkes konvergensradius.

3° Beregn

$$\int_{\partial K(\pi,\pi)} f(z)\,dz\,,$$

hvor $\partial K(\pi,\pi)$ gennemløbes i positiv omløbsretning.

Opgave 4

Lad den periodiske funktion g på $\mathbb{R}$ med periode 2π være givet ved

$$g(\theta) = \theta\cos\frac{1}{2}\theta\,,\ \theta\in[-\pi,\pi[\,.$$

1° Bestem den trigonometriske Fourierrække for g.

2° Vis, at den trigonometriske Fourierrække for g er uniformt konvergent på $\mathbb{R}$.

3° Bestem den trigonometriske Fourierrække for g'.

4° Bestem summen af Fourierrækken for g' i $\theta=\pi$ og vis herved, at

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{(\frac{1}{4}-n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4}\,.$$