Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1995

Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

1^o Lad (X,d_X), (M_1,d_1) og (M_2,d_2) være metriske rum, og lad d være produktmetrikken af d_1 og d_2 på $M = M_1 \times M_2$. Vi betragter en funktion $f = (f_1, f_2) : X \to M = M_1 \times M_2$ (der gælder altså $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ for $x \in X$). Vis, at $f : (X,d_X) \to (M,d)$ er uniformt kontinuert, netop hvis $f_1 : (X,d_X) \to (M_1,d_1)$ og $f_2 : (X,d_X) \to (M_2,d_2)$ er uniformt kontinuerte.

2^o Lad (X,d_X) og (Y,d_Y) være metriske rum. Vis, at en afbildning $f : X \to Y$ er kontinuert, netop hvis det for enhver delmængde B af Y gælder, at

$$f^{-1}(B^o) \subseteq f^{-1}(B)^o.$$

3^o Lad X være en mængde, og lad d_1 og d_2 være metrikker på X. Lad $\mathcal{G}_1$ og $\mathcal{G}_2$ betegne systemet af åbne delmængder i de metriske rum (X,d_1) og (X,d_2). Vi siger, at 'd_1 er finere end d_2', hvis $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{G}_1$ (altså hvis alle åbne mængder i (X,d_2) også er åbne i (X,d_1)). Vis, at d_1 er finere end d_2, netop hvis

$$\forall a \in X \, \forall r > 0 \, \exists s > 0 : K_1(a,s) \subseteq K_2(a,r).$$

(Kugler i (X,d_1) og (X,d_2) betegnes med henholdsvis $K_1(a,r)$ og $K_2(a,r)$.)

3^o Lad (X,d_X) være et metrisk rum. En afbildning $f : X \to \mathbb{R}$ siges som bekendt at være kontinuert i et punkt $a \in X$ hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Vi siger, at 'f er kontinuert fra oven i a', hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in X : d_X(a,x) < \delta \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon.$$

Vis, at f er kontinuert fra oven i punktet $a \in X$, netop hvis

$$\forall \alpha > f(a) \, \exists \delta > 0 : f(K_X(a,\delta)) \subseteq \,]-\infty, \alpha[\,.$$

4^o Vi siger, at 'f er kontinuert fra oven', hvis f er kontinuert fra oven i ethvert punkt. Vis, at en afbildning $f : X \to \mathbb{R}$ er kontinuert fra oven, netop hvis $f^{-1}(]-\infty,\alpha[)$ er en åben delmængde af X for alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

5^o Vis, at hvis A er en delmængde af X, da er indikatorfunktionen $f = 1_A$ kontinuert fra oven, netop hvis A er en afsluttet delmængde af X.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2

1^o Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en kontinuert, begrænset funktion, og lad $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion, der er integrabel med hensyn til Lebesguemålet. For hvert $n \in \mathbb{N}$ defineres funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$f_n(x) = f(\frac{x}{n})g(x).$$

Gør rede for, at f_n for hvert $n \in \mathbb{N}$ er integrabel over $\mathbb{R}$ med hensyn til Lebesguemålet, og vis, at

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \to f(0)\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

2^o (Samme betegnelser som i 1^o.) For hvert $n \in \mathbb{N}$ sættes $g_n(x) = ng(nx)$. Gør rede for, at der for hvert $y \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$ gælder, at funktionen $x \to f(x)g_n(x-y)$ er integrabel over $\mathbb{R}$, og at

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g_n(x-y)\,dx \to f(y)\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

(Vink: Anvend 1^o og passende variabelskift.)

3^o Lad $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ være en C^1-funktion, og lad α, β, a, b være reelle tal med $0 \le \alpha < \beta$ og $0 \le a < b$, og sæt $I = [\alpha,\beta] \times [a,b]$. Gør rede for, at funktionen $(x,y) \to f'(xy)$ (hvor f' betegner den afledede af f) er integrabel over I med hensyn til Lebesguemålet, og vis formlen

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int_a^b \frac{f(\beta x)-f(\alpha x)}{x}\,dx$$

ved at udregne integralet $\int_I f'(xy)\,dm_2(x,y)$ på to forskellige måder, idet der også skal gøres rede for, at de pågældende integraler eksisterer.

4^o (Samme betegnelser som i 3^o.) Antag nu, at f er voksende, og at $a > 0$, samt at $K = \lim_{x\to+\infty} f(x) < +\infty$. Vis, at funktionen $x \to \frac{f(bx)-f(ax)}{x}$ er integrabel over $]0,+\infty[$ med hensyn til Lebesguemålet, samt at

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = (K - f(0))\log\frac{b}{a}.$$

5^o Idet $0 < a < b$ skal man vise, at

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(bx)-\operatorname{Arctan}(ax)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{b}{a},$$

idet der også skal gøres rede for, at det pågældende integral eksisterer.

Opgave 3

Betragt den komplekse funktion f givet ved

$$f(z) = \frac{e^{\pi z}-1}{(z-2)(z+i)}$$

Opgave 3 fortsættes på side 3

i området
$$G = \mathbb{C} \setminus \{2, -i\} \ .$$

1° Begrund, at f har en potensrækkefremstilling $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ i en (ikke-tom) åben cirkelskive med centrum i 0.

2° Bestem konvergensradius for denne række.

3° Beregn a_0 og a_1.

4° Beregn
$$\int_{\partial K(0,\frac{3}{2})} \frac{f(z)}{z^2}\, dz \ ,$$
hvor cirklen $\partial K(0, \frac{3}{2})$ gennemløbes i positiv omløbsretning.

Opgave 4

Lad for givet $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ være bestemt således, at
$$f(\theta) = e^{i\alpha\theta} \quad \text{for} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \ ,$$
og således, at f er periodisk med periode 2π på $\mathbb{R}$.

1° Beregn de trigonometriske Fourierkoefficienter $c_n(f)$ for f og opskriv den trigonometriske Fourierrække hørende til f.

2° Vis, at denne række er punktvis konvergent i $\mathbb{R}$.

3° Begrund, at rækken ikke er uniformt konvergent i $\mathbb{R}$.

4° Bestem rækkens sum for $\theta = 0$ og vis herved formlen
$$\pi\cot(\pi\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha - n} \quad \text{for} \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \ .$$