Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1994-95

# Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

## Opgave 1

1° Lad $X$ være en mængde, og lad $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge af funktioner $f_n : X \to \mathbb{R}$, så $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergerer uniformt mod funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Vis, at hvis $\varphi : Y \to X$ er en afbildning fra en mængde $Y$ ind i $X$, da konvergerer funktionsfølgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hvor $g_n = f_n \circ \varphi : Y \to \mathbb{R}$, uniformt mod funktionen $g = f \circ \varphi : Y \to \mathbb{R}$.

2° Lad $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en uniformt kontinuert funktion. Vis med betegnelserne fra 1°, at funktionsfølgen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hvor $h_n = \psi \circ f_n : X \to \mathbb{R}$, konvergerer uniformt mod funktionen $h = \psi \circ f : X \to \mathbb{R}$.

3° Lad $(X, d_X)$ og $(Y, d_Y)$ betegne metriske rum, og lad $\varphi : X \to Y$ være en bijektiv afbildning. For $x_1, x_2 \in X$ sættes

$$d'_X(x_1, x_2) = d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)).$$

Vis, at der herved er defineret en metrik $d'_X$ på $X$. Idet $K_X(x,r)$, $K'_X(x,r)$ og $K_Y(y,r)$ betegner kugler i henholdsvis det metriske rum $(X, d_X)$, $(X, d'_X)$ og $(Y, d_Y)$, skal man vise, at $K'_X(a,r) = \varphi^{-1}(K_Y(\varphi(a), r))$ for $a \in X$, $r > 0$.

4° Vis med betegnelserne fra 3°, at $\varphi : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ er en homeomorfi, hvis og kun hvis $d_X$ og $d'_X$ er ækvivalente metrikker på $X$.

## Opgave 2

1° Lad $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ være en kontinuert, begrænset funktion. For hvert $n \in \mathbb{N}$ defineres funktionen $f_n : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ ved

$$f_n(x) = f(\frac{x}{n})e^{-x}.$$

Gør rede for, at $f_n$ for hvert $n \in \mathbb{N}$ er integrabel over $[0, +\infty[$ med hensyn til Lebesguemålet, og vis, at

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \to f(0) \text{ for } n \to \infty.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

2° Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ sættes

$$E_n = \{x \in X \mid 0 \leq f(x) \leq n\}$$

og

$$F_n = \{x \in X \mid -n \leq f(x) \leq 0\},$$

og funktionen $h_n : X \to \mathbb{R}$ defineres ved $h_n = 1_{E_n} - 1_{F_n}$. Gør rede for, at $h_n f \in \mathcal{L}(X, \mathbb{E}, \mu)$ for hvert $n \in \mathbb{N}$, og vis, at

$$\int h_n f \, d\mu \to \int |f| \, d\mu \text{ for } n \to \infty.$$

3° Lad funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x, y) = ye^{-xy} \sin x,$$

og lad $E = ]0, +\infty[ \times ]0, 1[$. Gør rede for, at $f$ er integrabel over $E$ med hensyn til Lebesguemålet, og find værdien af

$$\int_E f \, dm_2.$$

(Det kan uden bevis benyttes, at $\int_0^{+\infty} \sin x e^{-tx} \, dx = \frac{1}{1+t^2}$.)

## Opgave 3

Man betragter funktionen

$$\varphi(\lambda) = \frac{2 + \sin \lambda}{2 + \cos \lambda}.$$

1° Vis, at $\varphi(\lambda)$ er en meromorf funktion af $\lambda \in \mathbb{C}$, og find dens poler og nulpunkter (udtrykt ved hjælp af elementære funktioner, såsom $\sqrt{\phantom{x}}$, Log, eksponential- og trigonometriske funktioner).

2° Beregn integralet

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t) \, dt.$$

(*Vink til* 1° *og* 2°. Sættes $z = e^{i\lambda}$, kan man omskrive $\varphi(\lambda)$ til en rational funktion af $z$. Integralet kan da omskrives til et kurveintegral langs kurven $z = e^{it}$.)

Opgavesættet fortsættes på side 3

## Opgave 4

Det er velkendt, at systemet

$$(\star) \qquad \left\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,\sin nx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

er et fuldstændigt ortonormalsystem i $L_2([0,\pi],dx)$.

Man betragter følgende funktioner på $[0,\pi]$:

$$f(x) = \tfrac{\pi}{2} - |x - \tfrac{\pi}{2}|,$$
$$g(x) = 1,$$
$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{for } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ 0 & \text{for } x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi. \end{cases}$$

1° Angiv, for hver af funktionerne $f$, $g$ og $h$, hvorvidt deres Fourierrække efter systemet $(\star)$ konvergerer

(a) i $L_2([0,\pi])$,
(b) uniformt på $[0,\pi]$,
(c) punktvis i visse punkter af $[0,\pi]$ (hvilke?).

2° Find Fourierkoefficienterne for $g$ efter systemet $(\star)$.

3° Bevis formlen

$$\sum_{\substack{k=\cancel{1}\\ 0}}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$