Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

[*De følgende fire delopgaver er uafhængige af hinanden.*] 1° Lad (M,d) være et metrisk rum. Vis, at en følge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge, netop hvis der gælder

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}\,\forall n\geq N:\ d(x_n,x_N)\leq\varepsilon.$$

2° Lad (X,d_X), (Y,d_Y) være metriske rum, og lad $f:X\to Y$ være en afbildning. Vis, at hvis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en Cauchy følge i (X,d_X), og hvis f er uniformt kontinuert, da er følgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en Cauchy følge i (Y,d_Y). 3° En kontinuert funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ siges at 'forsvinde i uendelig', hvis der gælder

$$\forall\varepsilon>0\,\exists K>0:|f(x)|\leq\varepsilon \text{ for alle } x \text{ med } |x|\geq K.$$

Med $C_0(\mathbb{R})$ betegnes underrummet i $C_b(\mathbb{R})$ bestående af alle kontinuerte funktioner, der forsvinder i uendelig. Gør rede for, at $C_0(\mathbb{R})$ udstyret med den uniforme norm $||\ ||_u$ er et Banach rum. 4° Lad (M,d) være et metrisk rum, og lad A være en delmængde af M. Gør rede for, at mængden af diskontinuitetspunkter for indikatorfunktionen 1_A for A netop er randen ∂A af A.

Opgave 2

1° Lad $f:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ være en begrænset, målelig funktion, og lad funktionerne f_n, $n\in\mathbb{N}$, være givet ved $f_n(x)=f(x)e^{-nx}$, $x\in\,]0,+\infty[$. Vis, at f_n er integrabel over $]0,+\infty[$ for alle $n\in\mathbb{N}$, og at

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\to 0 \ \text{ for } \ n\to\infty.$$

2° Vis under anvendelse af Tonellis sætning, at funktionen

$$f(x,y)=e^{-xy}\sin x,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

er integrabel over intervallet $]0,a[\,\times\,]0,+\infty[$ for ethvert $a>0$. 3° Vis ved integration af funktionen f fra 2^o over intervallet $]0,a[\,\times\,]0,+\infty[$, at

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}-\cos a\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ay}}{1+y^2}dy-\sin a\int_0^{+\infty}\frac{ye^{-ay}}{1+y^2}dy$$

for ethvert $a>0$. (Vink: Det kan uden bevis benyttes, at $\int e^{-\alpha x}\sin x\,dx = -\frac{(\alpha\sin x+\cos x)e^{-\alpha x}}{1+\alpha^2}$ for hvert $\alpha\in\mathbb{R}$.) 4° Vis under anvendelse af det foregående, at

$$\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx\to\frac{\pi}{2}\ \text{ for } \ n\to\infty.$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Man betragter den meromorfe funktion på $\mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^3 - z^2} \sin z.$$

1° Find samtlige poler og nulpunkter for $f(z)$, og bestem deres orden. 2° Find

$$\int_{\partial K(0,2)} f(z)\, dz,$$

hvor cirklen $\partial K(0,2)$ gennemløbes i positiv omløbsretning.

Opgave 4

1° Lad $\varphi(x) \in L_2([0,\pi])$ have sinusrækken $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx$. Vis, at hvis

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |n^a b_n|^2 < \infty \quad \text{for et } a > \tfrac{1}{2}, \tag{*}$$

så konvergerer sinusrækken absolut og uniformt mod en kontinuert repræsentant for φ. (*Vink*. Man kan vise, at $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n| < \infty$, når (*) gælder.) 2° Lad Ω betegne rektanglet (med punkter (x,t))

$$\Omega =]0,\pi[\times]0,c[,$$

hvor $c > 0$. Vis, hvorledes man kan finde en løsning u i $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ til problemet:

$$\partial_t u(x,t) - 2\partial_x^2 u(x,t) = 0 \quad \text{for } (x,t) \in \Omega,$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{for } x \in [0,\pi],\ t = 0, \\ 0 & \text{for } x = 0,\ t \in [0,c], \\ 0 & \text{for } x = \pi,\ t \in [0,c]; \end{cases}$$

ved separation af de variable, når $\varphi \in H_0^1([0,\pi])$. 3° Vis, at hvis φ blot har egenskaben (*) (se 1°), kan problemet i 2° ligeledes løses ved separationsmetoden.