Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1993–94

Matematik 2 MA

Opgave 1

1° Lad (X, d_X), (Y, d_Y) og (Z, d_Z) være metriske rum. Vis, at hvis $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ er uniformt kontinuerte afbildninger, da er $g \circ f : X \to Z$ uniformt kontinuert.

2° Vis, at hvis en Cauchyfølge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i et metrisk rum (M, d) har en konvergent delfølge, da er $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

3° Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en differentiabel funktion. Vis, at den afledede $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en Borelfunktion. (Vink: Betragt funktionsfølgen $g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$.)

4° Lad $(X, \mathbb{E})$ og $(Y, \mathbb{F})$ være målbare rum, og lad $f : X \to Y$ være en afbildning. Vis, at hvis afbildningen $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ er målelig for alle målelige afbildninger $g : Y \to \mathbb{R}$, da er f målelig. Her tænkes $\mathbb{R}$ udstyret med Borelalgebraen. (Vink: Benyt funktioner g af formen $g = 1_F$, hvor $F \in \mathbb{F}$.)

Opgave 2

1° Lad $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$. For hvert $n \in \mathbb{N}$ defineres funktionen f_n ved $f_n(x) = f(x)e^{-\frac{x^2}{n}}$. Gør rede for, at $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og at

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

2° Lad $(X, \mathbb{E}, \mu)$ være et målrum, og lad $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$ være en voksende følge af målelige mængder, så $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. Idet f er en given funktion i $\mathcal{M}^+(X, \mathbb{E})$ defineres for hvert $n \in \mathbb{N}$ funktionen $f_n : X \to [0, +\infty[$ ved

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{hvis } x \in E_n \text{ og } f(x) \le n \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Gør rede for, at f_n er målelig, og at

$$\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu.$$

3° Lad a, b være reelle tal så $0 < a < b$, og sæt $E =]0, +\infty[\times [a, b]$. Udregn integralet

$$\int_E e^{-xy}\,dm_2(x, y)$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

på to forskellige måder, og udled herved formlen

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}.$$

Opgave 3

Man betragter funktionen

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} + 1.$$

1°. Find poler og nulpunkter for $f(z)$.

2°. Undersøg, om $f(z)$ har en stamfunktion i området

$$G_1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \,\},$$

og angiv en sådan i bekræftende fald.

3°. Undersøg, om $f(z)$ har en stamfunktion i området

$$G_2 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < 3,\ \operatorname{Im} z > -\tfrac{1}{2}, z \neq i \,\},$$

og angiv en sådan i bekræftende fald.

4°. Find

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz,$$

hvor $K = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in [-1,1],\ \operatorname{Im} z \in [0,2] \,\}$, og randen ∂K gennemløbes i positiv omløbsretning.

Opgave 4

Den første anvendelse af trigonometriske rækker til løsning af differentialligninger blev opstillet af J. Fourier i 1807. Han betragtede differentialligningen

$$\text{(1)} \qquad \Delta u(x,y) = 0 \quad \text{for } (x,y) \in \Omega = \,]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\, \times \,]0,\infty[,$$

med randbetingelsen

$$\text{(2)} \qquad \begin{array}{lll} \text{(i)} & u(x,0) = \varphi(x) & \text{for } x \in \,]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[, \\ \text{(ii)} & u(-\tfrac{\pi}{2}, y) = 0 & \text{for } y \geq 0, \\ \text{(iii)} & u(\tfrac{\pi}{2}, y) = 0 & \text{for } y \geq 0; \end{array}$$

Opgave 4 fortsættes på side 3

hvor φ er en given funktion. I det følgende betegner I intervallet $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

1°. Find produktløsningerne (dvs. løsningerne af formen $u(x,y) = X(x)Y(y)$) til problemet (1), (2 ii–iii). Hvilke af disse er *begrænsede* funktioner?

2°. Det fulde problem (1)–(2) søges herefter løst for generelle funktioner φ ved rækkeudvikling i systemet af begrænsede produktløsninger. Opstil rækken for en given funktion $\varphi \in L_2(I)$. Vis, at når $\varphi \in H_0^1(I)$, konvergerer rækken uniformt på $\overline{\Omega}$, og den ved rækken fremstillede funktion opfylder (1)–(2).

3°. Fourier betragtede selv tilfældet, hvor $\varphi(x) \equiv 1$. Er denne funktion i $H_0^1(I)$? Find udviklingskoefficienterne, og undersøg, i hvilket omfang rækken løser (1)–(2).

[*Vink til Opgave 4.* Man kan gøre regningerne mere overskuelige ved at ændre koordinater, så I bliver intervallet $]0,\pi[$.]