Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1993

Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Lad $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ være en følge af funktioner, hvor $\varphi_n \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ for alle $n \in \mathbf{N}$. Vi betragter betingelserne:

(a) $\varphi_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbf{N}$,
(b) $\int_{\mathbf{R}} \varphi_n(x)\,dx = 1$ for alle $n \in \mathbf{N}$,
(c) $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ (dvs. $\varphi_n(x) = 0$ for $x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$) for alle $n \in \mathbf{N}$.

Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ være en begrænset, Borel målelig funktion.

1^o Vis, at hvis $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ opfylder (a), (b) og (c), og hvis f er kontinuert i 0 og $f(0) = 0$, da gælder

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\varphi_n(x)\,dx \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty. \qquad (*)$$

Vi betragter nu i stedet for (c) betingelsen:

(c′) For hvert $a > 0$ gælder $\int_{[-a,a]} \varphi_n(x)\,dx \to 1$ for $n \to \infty$.

2^o Lad $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R})$, og antag, at $\varphi \geq 0$ og $\int_{\mathbf{R}} \varphi(x)\,dx = 1$. Vis, at hvis $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ for alle $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$, da opfylder følgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ betingelserne (a), (b) og (c′).

3^o Antag, at følgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ opfylder (a), (b) og (c′). Vis, at

$$\int_{\mathbf{R}\setminus[-a,a]} f(x)\varphi_n(x)\,dx \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

for alle $a > 0$.

4^o Antag, at følgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ opfylder (a), (b) og (c′), og at f er kontinuert i 0 og $f(0) = 0$. Vis, at $(*)$ stadig gælder. (Vink: Anvend bl. a. 3^o).

Opgave 2

Lad $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbf{R}^2)$. Funktionen h defineres ved

$$h(x,y) = \int_{\mathbf{R}^2} f(u,v)g(x-u, y+v)\,dm_2(u,v)\,,$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

hvor h er defineret for de talsæt $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, for hvilke det angivne integral eksisterer.

1^o Gør rede for, at h er defineret for n.a. $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, og at h bestemmer et element i $L_1(\mathbf{R}^2)$, også betegnet h, for hvilket

$$||h||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1.$$

(Vink: Anvend bl.a. Tonellis sætning og passende variabelskift.)

2^o Vis, at hvis yderligere enten f eller g er kontinuert og begrænset, da er h overalt defineret, kontinuert og begrænset.

Opgave 3

For hvert $a \in \mathbf{C}$ betragtes den meromorfe funktion

$$f_a(z) = \frac{\sin z}{\cos(2z - a)}.$$

$1°$ Angiv samtlige poler og nulpunkter for f_a, for hvert $a \in \mathbf{C}$.

$2°$ Vis, at antallet af poler og nulpunkter inden for cirklen $K(0, \frac{3}{2}\pi)$ er konstant for $|a| < 1$, og find en formel for

$$\int_{\partial K(0,\frac{3}{2}\pi)} f_a(z)\, dz,$$

udtrykt ved funktioner af a.

Opgave 4

$1°$ Betragt variabelskiftet $x = t^2$ for x og $t > 0$. Vis, at når $v(x)$ og $w(t)$ er funktioner på $\mathbf{R}_+$ relateret ved

$$v(x) = w(t), \text{ når } x = t^2,$$

så er

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = 2\sqrt{x}\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\frac{dv}{dx}\right) = 4x\frac{d^2 v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx},$$

for tilsvarende værdier af t og x.

$2°$ Vis, at problemet

$$-2\sqrt{x}\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\frac{dv}{dx}\right) = \lambda v, \quad x \in]\pi^2, 4\pi^2[,$$
$$v(\pi^2) = v(4\pi^2) = 0,$$

Opgave 4 fortsættes på side 3

er et regulært Sturm-Liouville problem, og find egenfunktionerne og egenværdierne.

3° Lad Ω betegne rektanglet $]\pi^2, 4\pi^2[\times]0,1[$ i $\mathbf{R}^2$, og betragt problemet

$$(*) \qquad \begin{aligned} 4x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \text{ i } \Omega, \\ u &= \varphi \text{ på } \partial\Omega, \end{aligned}$$

hvor φ er 0 på de dele af $\partial\Omega$ hvor $y > 0$, mens $\varphi(x, 0)$ er en given funktion $g(x) \in C^1([\pi^2, 4\pi^2])$ med $g(\pi^2) = g(4\pi^2) = 0$. Fremstil en løsning til $(*)$ på rækkeform ved metoden separation af de variable, og diskuter konvergensen.