**Københavns Universitet**
**Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1992-93**

# Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

## Opgave 1

Afgør i hvert af følgende fire tilfælde, om den anførte påstand er rigtig eller forkert. Der ønskes givet et bevis henholdsvis et modeksempel.

Lad $(M, d)$ være et metrisk rum.

$1^o$ Mængden af fortætningspunkter for en følge i $(M, d)$ er en afsluttet delmængde af $M$.

$2^o$ Hvis $f, g : M \to \mathbf{C}$ er uniformt kontinuerte funktioner, da er funktionen $f + g : x \to f(x) + g(x)$ ligeledes uniformt kontinuert.

$3^o$ Hvis $f, g : M \to \mathbf{C}$ er uniformt kontinuerte, begrænsede funktioner, da er funktionen $fg : x \to f(x)g(x)$ ligeledes uniformt kontinuert.

$4^o$ Hvis $f, g : M \to \mathbf{C}$ er uniformt kontinuerte funktioner, da er funktionen $fg : x \to f(x)g(x)$ ligeledes uniformt kontinuert.

## Opgave 2

$1^o$ For hvert $n \in \mathbf{N}$ defineres funktionen $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ved

$$f_n(x) = \sin(n(1 + x^2))e^{-n|x|}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Gør rede for, at $f_n$ tilhører $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ for hvert $n \in \mathbf{N}$, og vis, at

$$\int f_n(x)dx \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

$2^o$ Lad $\mu$ være målet på $(\mathbf{R}^2, \mathbb{B}_2)$, der har tætheden $(x, y) \to e^{-(x^2+y^2)}$ med hensyn til $m_2$. Gør rede for, at funktionen $u_n : (x, y) \to (x + iy)^n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ er $\mu$-integrabel for hvert $n \in \mathbf{N}$, og vis at

$$\int u_n(x, y)d\mu(x, y) = 0$$

for alle $n \in \mathbf{N}$. (Vink: Anvend polære koordinater.)


Opgave 2 fortsættes på side 2

$3^o$ Funktionsfølgen $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ er givet ved

$$g_n(x) = ne^{-n|x|}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Vis, at der for hvert $\alpha > 0$ gælder, at

$$\int_{|x|\geq\alpha} g_n(x)dx \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty.$$

## Opgave 3

For $R > 0$ og $j = 1, 2, 3$ betragtes kurveintegralerne

$$I_{j,R} = \int_{\gamma_{j,R}} \frac{1}{(z+1)(z-1)}\, dz,$$

hvor $\gamma_{j,R}$ er en af følgende kurver i den komplekse plan:

$$\gamma_{1,R} = \{\, z = it - 2 \mid t \in [-R, R]\,\},$$
$$\gamma_{2,R} = \{\, z = it \mid t \in [-R, R]\,\},$$
$$\gamma_{3,R} = \{\, z = it + 2 \mid t \in [-R, R]\,\}.$$

Vis, at

$$\lim_{R\to\infty} I_{j,R}$$

eksisterer for $j = 1, 2, 3$, og find værdierne.

## Opgave 4

$1°$ Med $f(x)$ betegnes funktionen

$$f(x) = \tfrac{\pi}{2} - |x - \tfrac{\pi}{2}|, \quad x \in [0, \pi].$$

Bestem sinus-rækken $\sum_{n\in\mathbf{N}} b_n \sin nx$ for $f$ på intervallet $[0, \pi]$.

$2°$ Undersøg, for hvilke værdier af $c$, funktionen

$$v(x, y, z) = \sin nx \sin \tfrac{m}{2} y \sinh cz$$

for givne $n$ og $m$ er løsning til $(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)v = 0$.

Opgave 4 fortsættes på side 3

3° Lad $\Omega$ betegne det tredimensionale område

$$\Omega = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 < x < \pi,\; 0 < y < 2\pi,\; 0 < z < 3\pi \,\}.$$

Man betragter Dirichlet problemet

$$(*) \qquad \begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ i } \Omega, \\ u &= \varphi \text{ på } \partial\Omega, \end{aligned}$$

hvor $\varphi$ er 0 på de dele af $\partial\Omega$ hvor $z > 0$, mens

$$\varphi(x, y, 0) = (\tfrac{\pi}{2} - |x - \tfrac{\pi}{2}|)(\pi - |y - \pi|).$$

Find en løsning til $(*)$ på rækkeform ved metoden separation af de variable, og diskuter konvergensen. (Illustrer gerne med en tegning af $\Omega$ og af grafen af $\varphi$.)