Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1992

Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Lad $C([0,1])$ betegne Banach rummet af kontinuerte funktioner $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ forsynet med den uniforme norm

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| \mid x \in [0,1] \} \ .$$

Ved fastsættelsen

$$T(s)(x) = \frac{1}{1+sx} \ , \quad s \in [0,\infty[\ , \ x \in [0,1]$$

defineres en afbildning $T : [0,\infty[\to C([0,1])$.

1° Vis, at T er afstandsformindskende.

Lad μ være et sandsynlighedsmål på $([0,1]\, , \mathbb{B}([0,1]))$, dvs. et mål på Borel mængderne i $[0,1]$ så $\mu([0,1]) = 1$.

Definer

$$g(s) = \int_0^1 \frac{d\mu(x)}{1+sx} = \int T(s) d\mu \quad \text{for} \quad s \in [0,\infty[\ .$$

2° Vis, at $g : [0,\infty[\to [0,\infty[$ er en kontinuert og aftagende funktion med $g(0) = 1$.

3° Vis, at $\lim_{s\to\infty} g(s) = \mu(\{0\})$.

Opgave 2

Betragt mængden

$$G = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0 \ , \ x+y > 2 \ , \ xy < 1 \right\} \ .$$

1° Skitsér G og gør rede for, at G består af de to åbne disjunkte mængder

$$G_1 = \{ (x,y) \in G \mid x < 1 \} \ , \quad G_2 = \{ (x,y) \in G \mid x > 1 \} \ .$$

2° Vis, at G ikke er sammenhængende.

3° Vis, at $m_2(G_1) = m_2(G_2) = \infty$.

Lad $f : G \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} & \text{for} \ \ (x,y) \in G_1 \ , \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{for} \ \ (x,y) \in G_2 \ . \end{cases}$$

4° Gør rede for, at f er en kontinuert funktion, og find værdien af integralet $\int_G f \, dm_2$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1992
Matematik 2 MA

Opgave 3

Lad α og β være komplekse tal, med $\operatorname{Im}\alpha > 0$ og $\operatorname{Im}\beta < 0$, og lad

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}.$$

1° For hvert $\lambda \in \mathbb{C}$ betragtes funktionen $\varphi_\lambda(z) = f(z)e^{i\lambda z}$. Gør rede for, at $\varphi_\lambda(z)$ er meromorf i $\mathbb{C}$, og bestem dens poler og tilhørende residuer.

2° Bestem den Fourier transformerede

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)\,dx,$$

af funktionen $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 4

Lad Ω betegne følgende åbne mængde i planen (en kvartcirkel):

$$\Omega = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\, y > 0,\, x^2 + y^2 < 1\,\}.$$

Man betragter det homogene Dirichlet problem

$$\Delta u = 0 \text{ i } \Omega,$$
$$u = \varphi \text{ på } \partial\Omega,$$

hvor φ er en funktion givet på randen af Ω. I det følgende antages, at φ er 0 på de to randstykker hvor $x = 0$ eller $y = 0$, samt at φ på cirkelbuen, der i polære koordinater fremstilles ved

$$\{\,(r,\theta) \mid r = 1,\, 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\,\},$$

er lig med en given funktion $g(\theta)$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

1° Find produktløsninger $R(r)\Theta(\theta)$ i polære koordinater.

2° Opstil en generel løsning som en række hvis led er produktløsninger, og diskuter konvergensen i tilfældet hvor $g \in H_0^1([0, \frac{\pi}{2}])$.

3° Find løsningen, når $g(\theta) = \sin 4\theta$.