Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1991-92

Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum og lad $C = C(X, Y)$ betegne mængden af kontinuerte afbildninger af X ind i Y.

1° Vis, at for $f, g \in C$ er $\varphi(x) = d_Y(f(x), g(x))$ en kontinuert funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$.

I det følgende antages at (X, d_X) er et kompakt metrisk rum.

2° Vis, at der ved fastsættelsen

$$D(f,g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \quad , \quad f, g \in C \, ,$$

defineres en metrik på C.

3° Lad A betegne mængden af afstandsformindskende afbildninger af X ind i Y. Vis, at A er en afsluttet delmængde af det metriske rum $(C(X, Y), D)$.

Opgave 2

På mængden

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \, , \ \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$$

betragtes funktionen $\varphi(x, y) = \frac{x}{y}$.

1° Udregn 2-normen af φ med hensyn til Lebesgue målet på G.

2° Vis, at $\varphi(G) = [1, 4]$.

Lad σ betegne billedmålet under φ af Lebesgue målet på G.

3° Udregn $\sigma([1, 4])$.

4° Vis, at der for en målelig funktion $f : [1, 4] \to [0, \infty]$ gælder

$$\int f \, d\sigma = \int_1^4 f(t)\left(\frac{2}{t^2} - \frac{1}{2t}\right) dt \, .$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad

$$h(z) = \frac{(z+1)(z^2-\pi^2)}{\sin z}.$$

1° Gør rede for, at $h(z)$ er en meromorf funktion på $\mathbf{C}$. Bestem alle nulpunkter og poler samt disses orden, og bestem residuerne i polerne.

2° Find

$$\int_{\partial K(0,8)} h(z)dz.$$

Opgave 4

Lad $\alpha > 0$, og lad f være funktionen på $\mathbf{R}$ med periode 2π defineret ved at

$$f(\theta) = (\pi+\theta)^\alpha(\pi-\theta)^\alpha \quad \text{for } \theta \in [-\pi, \pi].$$

Da f er kontinuert og dermed tilhører $L_2(\mathbf{T})$, konvergerer dens trigonometriske Fourierrække $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{in\theta}$ mod f i $L_2(\mathbf{T})$. (Fourierkoefficienterne c_n kræves ikke beregnet.)

1° Vis, at Fourierrækken konvergerer punktvis mod f.

2° Vis, at der for alle $\theta \in [-\pi, \pi]$ gælder, at $f(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} g(s)\,ds$, hvor

$$g(s) = \alpha(\pi+s)^{\alpha-1}(\pi-s)^\alpha - \alpha(\pi+s)^\alpha(\pi-s)^{\alpha-1} \quad \text{for } s \in]-\pi, \pi[.$$

3° Vis, at når $\alpha > \frac{1}{2}$, konvergerer Fourierrækken uniformt mod f.