Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1991

Matematik 2MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Lad (M,d) være et metrisk rum og lad $(a_n),(b_n),(c_n)$ være tre punktfølger fra M.

1° Vis, at hvis $d(a_n,b_n) \to 0$ og $d(b_n,c_n) \to 0$, så vil $d(a_n,c_n) \to 0$.

2° Lad A være en ikke tom delmængde af M og lad $x \in M$. Antag at (a_n) er en punktfølge fra $\overline{A}$ så $a_n \to x$.
Vis, at $x \in \overline{A}$.

3° Antag at $A, B \subseteq M$ er ikke tomme, afsluttede og disjunkte delmængder. Vis, at hvis A desuden er kompakt, så findes en konstant $\delta > 0$ således at

$$(*) \qquad d(a,b) \geq \delta \quad \text{for alle} \quad a \in A, b \in B\,.$$

(*Vink.* Antag at $(*)$ ikke gælder og slut, at der findes følger (a_n) fra A og (b_n) fra B så $d(a_n,b_n) \to 0$, og forsøg at udlede en modstrid.)

Opgave 2

Skitser følgende delmængde af $\mathbb{R}^3$

$$K = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq \pi,\ x^2 + (z - \sin y)^2 \leq y^2 \,\}.$$

1° Vis, at K er kompakt og sammenhængende.

2° Bestem snitmængden $K_y \subseteq \mathbb{R}^2$ for hvert $y \in [0,\pi]$.

3° Udregn voluminet $m_3(K)$.

Opgave 3

1° Find den trigonometriske Fourierrække for hver af de to periodiske funktioner f og $g \in L_2(\mathsf{T})$ defineret ved

$$f(\theta) = e^{\theta}, \quad g(\theta) = \cosh\theta, \quad \text{for } -\pi \leq \theta < \pi,$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

idet formlerne for Fourierkoefficienterne reduceres mest muligt. Vis, at rækken for g er uniformt konvergent, mens rækken for f ikke er det. Vis, at rækken for f ikke konvergerer absolut i noget punkt.

(Der mindes om, at en række $\sum_n a_n$ siges at være absolut konvergent, når $\sum_n |a_n|$ er konvergent.)

2° Løs følgende homogene Dirichlet problem på cirklen $\Omega = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < 1 \}$, ved metoden "separation af de variable":

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{i } \Omega, \\ u(1,\theta) &= \cosh\theta && \text{på } \partial\Omega. \end{aligned}$$

(Randbetingelsen er udtrykt i polære koordinater.)

Opgave 4

1° Find poler og residuer af funktionen

$$h(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

2° Find den Fourier transformerede af $h(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(*Vink.* Man kan benytte residueregning til at finde grænseværdien for $R \to \infty$ af $\displaystyle\int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} h(x)\,dx$, for $\xi \gtreqless 0$.)