Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990-91

Matematik 2MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Lad M betegne følgende delmængde af $\mathbb{R}^4$:

$$M = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid w \geq 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq e^{-w} \}.$$

1° Undersøg, om M er kompakt.

2° Find volumen af M (med hensyn til det 4-dimensionale Lebesgue mål).

Opgave 2

1° For hvert $\alpha \in \mathbb{R}$ betragtes følgen at funktioner på intervallet $I =]0,1]$ defineret ved

$$f_{\alpha,n}(x) = (nx)^\alpha, \text{ for } x \in I, \ n \in \mathbb{N}.$$

Undersøg for hvert α, om der for $n \to \infty$ gælder et af udsagnene

(a) følgen er punktvis konvergent,
(b) følgen er uniformt konvergent,
(c) følgen er konvergent i $\mathcal{L}_p(I)$ for et $p \in [1,\infty[$;

og angiv grænsefunktionen i hvert tilfælde.

2° Lad α være et tal for hvilket $f_{\alpha,n}$ er konvergent i $\mathcal{L}_1(I)$. Undersøg, om den differentierede funktionsfølge

$$f'_{\alpha,n}(x) = \frac{d}{dx} f_{\alpha,n}(x), \quad x \in I,$$

og om den integrerede funktionsfølge

$$F_{\alpha,n}(x) = \int_0^x f_{\alpha,n}(y)\,dy, \quad x \in I,$$

har nogen af egenskaberne (a), (b) eller (c).

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990-91
Matematik 2MA

Opgave 3

1° Vis, at $f(z)$ defineret ved

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & \text{for } z \neq 0\,, \\ \\ 1 & \text{for } z = 0\,, \end{cases}$$

er en hel funktion.

2° Beregn integralet

$$\int_{K(0,1)} \frac{\sin z}{z^2} dz\,,$$

hvor $K(0,1)$ betegner cirklen $|z| = 1$.

Opgave 4

Lad $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]-\pi,\pi[\,,\ y \in]0,1[\}$.

Løs følgende problem, hvor n er et ulige positivt tal:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ i } \Omega\,, \\ u(x,0) = (\sin x)^n \text{ for } x \in]-\pi,\pi[\,, \\ u = 0 \text{ på resten af randen } \partial\Omega\,. \end{cases}$$