Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1990

# Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

## Opgave 1

Lad $M$ betegne følgende delmængde af $\mathbf{R}^3$:

$$M = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{\sqrt{z+1}} , \ z \geq 0 \} ,$$

lad $a \in \mathbf{R}$, og definer funktionen $f$ på $M$ ved

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z^{-a} & \text{for } z > 0 , \\ 0 & \text{for } z = 0 . \end{cases}$$

1° Undersøg, om $M$ er kompakt.

2° Gør kort rede for, at $f$ er en målelig funktion på $M$ med hensyn til Lebesgue målet $m_3$.

3° Bestem de værdier af $a$, for hvilke $f \in \mathcal{L}_2(M, m_3)$.
(Man kan f. eks. benytte Tonellis sætning, med begrundelse, til at omskrive integralet til et integral med hensyn til $z$ af en funktion bestemt ved integration med hensyn til $(x, y)$.)

## Opgave 2

1° Gør rede for, at funktionen

$$g(z) = \frac{1}{\cosh z}$$

er meromorf i $\mathbf{C}$, og bestem dens poler.

2° For $m$ og $n \in \mathbf{N}$ betegner $Q_{mn}$ rektanglet med hjørner $-m\pi$, $m\pi$, $-m\pi + in\pi$ og $m\pi + in\pi$. Find, for hvert valg af $m$ og $n \in \mathbf{N}$, værdien af integralet

$$\int_{\partial Q_{mn}} g(z) dz ,$$

idet $\partial Q_{mn}$ gennemløbes i positiv omløbsretning.

3° Vis, at $g(x) = \frac{1}{\cosh x}$ (hvor $x \in \mathbf{R}$) tilhører $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$, og find $\hat{g}(0)$.


Opgavesættet fortsættes på side 2

## Opgave 3

Lad $N \in \mathbb{N}$, lad $c_n \in \mathbb{C}$ for $n \in [-N, N] \cap \mathbb{Z}$, og betragt for et vilkårligt fast $\lambda \in \mathbb{C}$ udtrykket

$$f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\lambda\theta} - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}|^2 d\theta \, .$$

i) For hvilket valg af $\{c_n\}_{n=-N}^{N}$ minimeres $f(\lambda)$?

ii) For hvilke $\lambda \in \mathbb{C}$ er dette minimum lig med nul?

## Opgave 4

Find egenværdier og egenfunktioner hørende til følgende regulære Sturm-Liouville-problem

$$\begin{cases} -(x^2u')' = \lambda u \, , & x \in ]1, e[ \, , \\ u(1) = u(e) = 0 \, . \end{cases}$$

Vink: Man kan benytte variabelskiftet $t = \log x$.