Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1989-90

Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

I det følgende betegner p et reelt tal med $1 \leq p < \infty$.
For hvert α og $\beta \in \mathsf{R}$ defineres funktionen f_α på R_+ og funktionen g_β på R^2 ved:

$$f_\alpha(x) = \frac{\operatorname{Arctan} x}{x^\alpha} \quad \text{for } x > 0;$$

$$g_\beta(x,y) = \frac{\operatorname{Arctan}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\beta} \quad \text{for } x^2+y^2 > 0\,, \quad g_\beta(0,0) = 0\,.$$

1° Bestem de α, for hvilke $f_\alpha|_{]0,1[}$ tilhører $\mathcal{L}_p(\,]0,1[\,)$, og de α, for hvilke $f_\alpha|_{]1,\infty[}$ tilhører $\mathcal{L}_p(\,]1,\infty[\,)$.

2° Idet $B = \{\,(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\,\}$, skal man bestemme de β, for hvilke $g_\beta|_B$ tilhører $\mathcal{L}_p(B)$, og de β, for hvilke $g_\beta|_{\mathsf{R}^2\setminus B}$ tilhører $\mathcal{L}_p(\mathsf{R}^2 \setminus B)$.

Opgave 2

Man betragter funktionen $u(x,y) = e^x \sin y$ for $(x,y) \in \mathsf{R}^2$.

1° Vis, at u er harmonisk.

2° Find en til u konjugeret funktion v (dvs. en funktion $v(x,y)$, så at $f = u + iv$ er en holomorf funktion af $z = x + iy$).

Opgave 3

Lad $f : \mathsf{R} \to \mathsf{C}$ være en periodisk funktion med periode 2π, dvs. $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ for alle $\theta \in \mathsf{R}$, defineret ved

$$f(\theta) = \theta \sin\theta \quad \text{for } \theta \in [-\pi, \pi[\,.$$

1° Skitser funktionen f.

2° Find dens trigonometriske Fourier-række.

3° Undersøg om rækken er uniformt konvergent.

Opgave 4

Find egenværdierne og egenfunktionerne til problemet

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda\rho(x)u(x)\ ,\ x \in]\frac{1}{e}, e[\ , \\ u(\frac{1}{e}) = u(e) = 0\ , \end{cases}$$

hvor $\rho(x) = \frac{1}{x^2}$.