Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedsekasamen, sommer 1989

Matematik 2 MA

Opgave 1

1°) Lad M betegne følgende punktmængde i $\mathbf{R}^2$:

$$M = \{ (x,y) \in \overline{\mathbf{R}}_+ \times \overline{\mathbf{R}}_+ \mid 0 \le xy \le 1 \}.$$

Er M afsluttet? Er M kompakt?

2°) Lad $\gamma \in \mathbf{R}$. Vis, at der findes en konstant C, så at der gælder:

$$|(1+1/x)^\gamma - 1| \le C/x \quad \text{for alle } x \ge 2.$$

3°) Vis, at integralet

$$(*) \qquad \int_M (1+x)^\alpha (1+y)^\beta \, dm_2$$

er endeligt, når $\alpha < 0$ og $\beta < 0$.

(Man kan bemærke, at det er tilstrækkeligt at vise det for α og β tæt ved 0.)

4°) Vis, at integralet $(*)$ er $+\infty$, når α eller $\beta \ge 0$.

Opgave 2

Lad $f(x) = (1+x)e^{-|x|}$ for $x \in \mathbf{R}$.

1°) Find den Fourier transformerede $\hat{f}(\xi)$ af f; vis specielt at det er en rational funktion af ξ (dvs. en kvotient mellem to polynomier).

2°) Lad $g(z)$ være den rationale funktion af kompleks variabel z, der stemmer overens med $\hat{f}(\xi)$ for $z = \xi \in \mathbf{R}$. Lad γ_a betegne den lukkede kurve, der er sammensat af intervallet $[-a, a]$ på den reelle akse og cirkelbuen $\{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = a, \ \operatorname{Im} z > 0 \}$, hvor a vælges så stor, at polerne for g i den øvre halvplan $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ ligger i den begrænsede åbne del af $\mathbf{C}$, der omsluttes af γ_a. Beregn

$$\int_{\gamma_a} g(z)\, dz,$$

hvor γ_a gennemløbes i positiv omløbsretning.

(Hvis punkt 1° ikke er besvaret, kan man i stedet redegøre for, hvad integralet bliver for en vilkårlig rational funktion af z uden poler på den reelle akse.)

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad $f : [0, \pi] \to \mathbf{C}$ være givet ved $f(\theta) = \cos\theta$.

1°) Vis, at $\{u_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $u_n(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin n\theta$, udgør et maksimalt ortonormalt system i $L_2([0, \pi])$.

2°) Find sinusrækken for f.

3°) Vis, at sinusrækken for f ikke konvergerer uniformt mod f.

Opgave 4

Idet Ω betegner mængden $\Omega =]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[$, betragtes følgende egenværdiproblem:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \text{ i } \Omega, \\ u &= 0 \text{ på } \partial\Omega. \end{aligned}$$

1°) Find produkt-egenfunktionerne med hensyn til Cartesiske koordinater.

2°) Vis, at de normaliserede produkt-egenfunktioner udgør et maksimalt ortonormal-system i $L_2(\Omega)$.