Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1988/89

Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

1° Vis, at hvis $v \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R})$ (dvs. v er kontinuert på $\mathbf{R}$ og har kompakt støtte), så vil funktionsfølgen v_n defineret ved

$$v_n(x) = v(x - \frac{1}{n}) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}$$

konvergere mod v i den uniforme norm for $n \to \infty$.

2° Lad f være funktionen på $\mathbf{R}$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{for } x \in]0,1[, \\ 0 & \text{for } x \in \mathbf{R} \setminus]0,1[; \end{cases}$$

og definer funktionerne f_n ved $f_n(x) = f(x - \frac{1}{n})$ for $n \in \mathbf{N}$.
Undersøg, om $f_n \to f$ i den uniforme norm for $n \to \infty$.
Undersøg, om $f_n \to f$ i $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ for $n \to \infty$.

3° Lad g være en vilkårlig funktion i $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$, og definer funktionerne g_n ved $g_n(x) = g(x - \frac{1}{n})$ for $n \in \mathbf{N}$.
Kan man slutte, at $g_n \to g$ i $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$ for $n \to \infty$?
[Det kan være nyttigt at erindre, at $\mathcal{C}_c(\mathbf{R})$ er tæt i $\mathcal{L}_1(\mathbf{R})$.]

Opgave 2

Lad $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ være en lige funktion, dvs. en funktion, der opfylder

$$f(-x) = f(x) \quad \text{for } x \in \mathbf{R}.$$

1° Vis, at den Fourier transformerede $\hat{f}$ af f opfylder

$$\hat{f}(\xi) = 2\int_0^\infty \cos(\xi x) f(x)\,dx, \quad \text{for alle } \xi \in \mathbf{R}.$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

2° Vis, at

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\xi x)\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

3° Find

$$\int_0^\infty \cos(\xi x)x^2 e^{-x^2}\,dx.$$

[Man kan benytte, at den Fourier transformerede af e^{-x^2} er lig med $\sqrt{\pi}\,e^{-\xi^2/4}$.]

Opgave 3

1° Vis, at funktionen

$$h(z) = \frac{z}{\sin \pi z}$$

er meromorf i $\mathbf{C}$, og bestem dens poler.

2° Bestem, for ethvert $r \in \mathbf{R}_+ \setminus \mathbf{N}$, værdien af kurveintegralet

$$\int_{\partial K(0,r)} \frac{z}{\sin \pi z}\,dz,$$

hvor cirklen $\partial K(0,r) = \{\, z \in \mathbf{C} \mid |z| = r \,\}$ gennemløbes i positiv omløbsretning.

Opgave 4

Lad $\Omega = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4 \,\}$.

1° Find løsningen til problemet

$$\begin{aligned} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \quad \text{i} \quad \Omega, \\ u(x,y) &= y^3 \quad \text{for} \quad x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 0 \quad \text{for} \quad x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

2° Vis, at $|u(x,y)| \le 1$ for $(x,y) \in \overline{\Omega}$.