Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, sommeren 1988

Matematik 2MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

For $\alpha \in \mathsf{R}_+$ betragtes følgende delmængde af R^3

$$E_\alpha = \{(x, y, z) \mid z \geq 0 , x^2 + y^2 \leq (1+z)^{-\alpha}\} .$$

1° Undersøg, om E_α er afsluttet, og om E_α er kompakt.

2° Vis, at det 3-dimensionale Lebesgue mål af E_α , $m_3(E_\alpha)$, er endeligt hvis og kun hvis $\alpha > 1$.

3° Bestem $m_3(E_\alpha)$ for $\alpha > 1$.

Opgave 2

Lad $f(z)$ være funktionen defineret for $z \in \mathsf{C}$ ved formlen

$$f(z) = \int_0^1 \cos(zt)\,dt .$$

1° Vis, at $f(z)$ er holomorf i C.

2° Find potensrækkefremstillingen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ for $f(z)$.

3° Vis, at den meromorfe funktion $g(z)$, defineret for $z \neq 0$ ved formlen

$$g(z) = \frac{f(z) - 1}{z} ,$$

har en hævelig singularitet i 0.

Opgave 3

Betragt følgende differentialligning, hvor $f \in C^1(\mathsf{T})$ er given

$$(-\frac{d^2}{d\theta^2} + \alpha)u(\theta) = f(\theta) , \; f \in C^1(\mathsf{T}) .$$

1° For hvilke $\alpha \in \mathsf{R}$ har ligningen en entydig løsning $u \in C^2(\mathsf{T})$?

2° Find løsningen $u \in C^2(\mathsf{T})$ for $\alpha = 1$. (Vink: Diagonaliser differentialoperatoren).

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4

Idet Ω betegner mængden

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2 \, , \, x > 0\} \, ,$$

hvor $R > 0$, betragtes følgende egenværdiproblem:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{i } \Omega \, , \\ u &= 0 \quad \text{på } \partial\Omega \, . \end{aligned}$$

1° Vis, at egenværdierne er strengt positive.

2° Find produkt-egenfunktionerne med hensyn til polære koordinater.

3° Vis, at de normaliserede produkt-egenfunktioner udgør et maksimalt ortogonalsystem i $L_2(\Omega)$.