Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1987-1988

Matematik 2MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

For et målrum $(X, \mathbf{E}, \mu)$ og $p > 0$ betragtes vektorrummet $\mathcal{L}_p(X)$ af målelige funktioner $f : X \to \mathbf{R}$ opfyldende $\int |f|^p d\mu < \infty$, og vi sætter

$$\| f \|_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p} \text{ for } f \in \mathcal{L}_p(X).$$

1° Lad $p, q > 0$ og lad α være bestemt ved $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}_p(X)$ og $g \in \mathcal{L}_q(X)$, så vil $fg \in \mathcal{L}_\alpha(X)$ og

$$\| fg \|_\alpha \quad \leq \quad \| f \|_p \| g \|_q .$$

I det følgende betragtes $X = [0, \infty[$ udstyret med σ-algebraen $\mathbf{E}$ af Borel delmængder af $[0, \infty[$ og μ lig med Lebesguemålets restriktion til $[0, \infty[$.

2° Vis, at $\frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}_p([0, \infty[)$ hvis og kun hvis $p > \frac{1}{2}$.

3° Lad $f, g : [0, \infty[\to \mathbf{R}$ være defineret ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \text{ for } n \leq x < n+1, n = 1, 2, \cdots . \end{cases}$$

Vis, at $fg \in \mathcal{L}_2([0, \infty[)$.

Opgave 2

Lad f være den i hele $\mathbf{C}$ meromorfe funktion

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

1° Vis, at f har en hævelig singularitet i $z = 0$ og find polerne for f og de tilhørende residuer.

2° Udregn integralet af f langs randen af rektanglet med vinkelspidser $(\pm 2\pi, 0)$,-$(\pm 2\pi, 3\pi)$, idet randen gennemløbes mod uret.

3° Gør rede for at f's Taylorrække med centrum 0 har konvergensradius 2π.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved $f(\theta) = |\cos\theta|, \theta \in \mathbf{R}$.

1° Find den trigonometriske Fourierrække for f.

2° Vis at rækken konvergerer uniformt mod f.

Opgave 4

Betragt problemet

$$\begin{cases} -u''(x) - u(x) = x^2\,,\ x \in]0, \frac{\pi}{4}[\\ u(0) = u'(\frac{\pi}{4}) = 0. \end{cases}$$

1° Vis at problemet har en entydig løsning.

2° Find løsningen.