Københavns Universitet
Matematisk Institut

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1987

MATEMATIK 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere).

Opgave nr. 1.

Lad μ være et mål på intervallet $[1,\infty[$ defineret på σ-algebraen af Borelmængder indeholdt i $[1,\infty[$. Desuden antages at

$$\int_1^\infty \frac{1}{y^2}\,d\mu(y) < \infty .$$

1° Vis, at funktionen

$$y \to \frac{1}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) \quad , \quad y \geq 1$$

er μ-integrabel for alle $x \in \mathbb{R}$, og at der ved fastsættelsen

$$F(x) = \int_1^\infty \frac{1}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right) d\mu(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

er defineret en differentiabel funktion $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(Vink. Det kan benyttes, at $|\sin x| \leq |x|$ for $x \in \mathbb{R}$).

2° Vis, at talfølgen $(a_k)_{k\geq 1}$ defineret ved

$$a_k = \int_1^\infty \frac{1}{y^{2k}}\,d\mu(y) \quad , \quad k = 1,2,\ldots .$$

er aftagende og opfylder

$$a_{k+l}^2 \leq a_{2k}\, a_{2l} \quad \text{for} \quad k,l \geq 1 .$$

3° Vis, at F fremstilles ved potensrækken

$$F(x) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{a_{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Matematisk Institut

Opgave nr. 2

Betragt den i $\mathbb{C}$ meromorfe funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+4)} .$$

1° Find polerne, deres orden og de tilhørende residuer.

2° Udregn værdien af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$$

3° Vis, at funktionen

$$g(z) = f(z) + \frac{4}{9} \frac{1}{z^2+4}$$

er holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.

Opgave nr. 3

Lad f være en periodisk funktion på den reelle akse med periode 2π sådan at $f(-\theta) = f(\theta)$ for alle $\theta \in \mathbb{R}$ og

$$f(\theta) = \begin{cases} \theta , & \theta \in [0, \frac{\pi}{2} [\\ \pi - \theta , & \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] . \end{cases}$$

1° Tegn grafen for f i intervallet $[-\pi, \pi [$.

2° Vis at den trigonometriske Fourier-række for f er uniformt konvergent.

3° Find Fourier-rækken.

(Opgavesættet fortsættes)

Københavns Universitet
Matematisk Institut

Opgave nr. 4

Betragt følgende problem, hvor R er en konstant større end 1

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{i} \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < R^2\} , \\ u = y^3 & \text{for} \quad x^2+y^2 = 1 , \\ u = 0 & \text{for} \quad x^2+y^2 = R^2 . \end{cases}$$

1° Vis at løsningen er entydig og opfylder $|u(x,y)| \leq 1$ for $(x,y) \in \bar{\Omega}$.

2° Find løsningen u og vis at $u \in C^\infty(\Omega)$.