~~Køb~~enhavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Januar 1987

MATEMATIK 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere).

Opgave 1

Lad $A,B \subseteq \mathbb{R}^4$ være givet ved

$$A = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid z^2 + w^2 \leq 1\} .$$

1°. Vis, at A og B er afsluttede delmængder af $\mathbb{R}^4$.

2°. Vis, at $A \cap B$ er kompakt.

3°. Find $m_4(A \cap B)$, det firedimensionale Lebesgue mål af $A \cap B$.

Opgave 2

Lad f være den i hele $\mathbb{C}$ meromorfe funktion

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2(z^2+4\pi^2)} .$$

1°. Vis, at f har hævelige singulariteter for $z = \pm 2\pi i$ og find $\lim_{z\to 2\pi i} f(z)$, $\lim_{z\to -2\pi i} f(z)$.

2°. Vis, at f har en pol og find denne samt dens orden og det tilhørende residuum. Find dernæst

(Opgaven fortsættes)

$$\int_{\partial K(0,10)} f(z)dz$$

idet cirklen gennemløbes en gang mod uret.

3°. Vis, at funktionen $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ for $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ er realdelen af en holomorf funktion i $\mathbb{C}$ og find en sådan.

Opgave 3

1°. Betragt følgende regulære Sturm-Liouville problem

$$\begin{cases} (Lu)(x) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), & x \in \,]-\pi,\pi[\\ u \in D(L) = \{u \in C^2([-\pi,\pi]) \mid u(-\pi) = u(\pi) = 0\} \end{cases}.$$

Find samtlige egenværdier og de tilhørende egenfunktioner.

2°. Vis, at følgende ulighed gælder

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u'(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 dx ,$$

for alle $u \in D(L)$.

(Vink. Udnyt, at alle egenværdierne er $\geq \frac{1}{4}$).

Opgave 4

Lad $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ være en Schwartz funktion og definer

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \frac{\hat{f}(\xi)}{\xi^2+1} d\xi , \qquad x \in \mathbb{R} .$$

1°. Vis, at u er en Schwartz funktion.

2°. Vis, at u er den eneste løsning til ligningen

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = f$$

indenfor Schwartz rummet $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.