Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1986

MATEMATIK 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere).

Opgave nr. 1

For $n = 1,2,\cdots$ sættes

$$T_n = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-n)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} e^{-zn^2}, \quad z \geq 0\right\},$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n .$$

1° Vis, at $T_n \cap T_{n+1} = \{(n+\frac{1}{2},0,0)\}$ og at $T_n \cap T_m = \emptyset$ når $|n-m| \geq 2$. (Man kan evt. støtte sig til en tegning.)

2° Vis, at E er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^3$ og find $m_3(E)$, det tredimensionale Lebesgue mål af E .

Opgave nr. 2

1° Lad γ være randen af kvadratet med hjørner $\pm\frac{1}{3} \pm \frac{i}{3}$, gennemløbet en gang mod uret. Find

$$\int_\gamma \frac{\tan \pi z}{z^2(4z^2-5z+1)} \, dz .$$

2° Antag, at $f \in \mathcal{L}([0,1])$. Vis, at

$$F(z) = \int_0^1 e^{tz} f(t)\,dt ,$$

(Opgaven fortsættes)

er defineret for alle $z \in \mathbb{C}$. Vis videre, at F er holomorf i $\mathbb{C}$ med potensrækkeudviklingen

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{hvor} \quad a_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n f(t)\,dt .$$

Opgave nr. 3

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(\theta+2\pi) = f(\theta)$ for $\forall\theta \in \mathbb{R}$, og $f(\theta) = \theta(2\pi-\theta)$ for $\theta \in [0,2\pi[$.

1° Find den trigonometriske Fourier række for f.

2° Vis, at rækken konvergerer uniformt mod f.

3° Find summen af rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Opgave nr. 4

Betragt følgende egenværdiproblem:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u \quad \text{i} \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1 ,\ x > 0 ,\ y > 0\} \\ u = 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega . \end{cases}$$

1° Vis, at egenværdierne er strengt positive.

2° Find produktegenfunktionerne.