Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Januar 1986

MATEMATIK 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere).

Opgave nr. 1

1°. Lad (M,d) være et metrisk rum og F_1, F_2 afsluttede delmængder af M opfyldende $F_1 \cup F_2 = M$. Lad der endvidere være givet en funktion $f : M \to \mathbb{R}$.

Vis, at hvis restriktionen af f til såvel F_1 som F_2 er kontinuert, så er f selv kontinuert.

(Det følgende spørgsmål er uafhængigt af spørgsmål 1°)

2° (a) Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være Lebesgue integrabel.

Vis, at

$$\int_0^{\infty} f(x - \tfrac{1}{x})\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right) dt$$

og

$$\int_{-\infty}^{0} f(x - \tfrac{1}{x})\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\right) dt\,.$$

(b) Lad $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$\phi(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x}\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Vis, at $\phi(m) = m$, hvor $\phi(m)$ er billedmålet af Lebesgue målet m på $\mathbb{R}$ under ϕ.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 2

Lad h være den i hele $\mathbb{C}$ meromorfe funktion

$$h(z) = \cot z - \frac{1}{z} \quad .$$

1° Vis, at h har en hævelig singularitet for $z = 0$ og find $\lim_{z \to 0} h(z)$.

2° Find polerne for h , deres orden og de tilhørende residuer.

3° Udregn kurveintegralerne

$$\int_{\partial K(0,1)} h(z)dz \quad , \quad \int_{\partial K(0,4)} h(z)dz \quad ,$$

idet det er underforstået, at cirklerne gennemløbes en gang mod uret.

Opgave nr. 3

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(\theta+2\pi) = f(\theta)$ og $f(\theta) = |\theta|$ for $\theta \in [-\pi,\pi[$.

1° Vis, at den trigonometriske Fourier række for f konvergerer punktvis mod f .

2° Vis, at konvergensen også er uniform.

3° Find Fourier rækken.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave nr. 4

1° Betragt følgende egenværdiproblem:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda u & \text{i} \quad \Omega =]0,\pi[\times]-\pi,\pi[\ , \\ u = 0 & \text{på} \quad \partial\Omega \ . \end{cases}$$

Find produktegenfunktionerne $(u(x,y) = \phi(x)\psi(y))$ og de dertil hørende egenværdier.

2° Løs følgende problem

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x(\sin 2y - \sin y) & \text{i} \quad \Omega =]0,\pi[\times]-\pi,\pi[\ , \\ u = 0 & \text{på} \quad \partial\Omega \ . \end{cases}$$