Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1985

MATEMATIK 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave nr. 1

Lad $A,B \subseteq \mathbb{R}^3$ være givet ved

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1\} .$$

1°. Vis, at $A \cap B$ er kompakt.

2°. Angiv billedet af $A \cap B$ ved projektionen $(x,y,z) \mapsto x$ af $\mathbb{R}^3$ på $\mathbb{R}$.

3°. Find $m_3(A \cap B)$, det tredimensionale Lebesgue mål af $A \cap B$.

Opgave nr. 2

Lad f være den i hele $\mathbb{C}$ meromorfe funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3(4z^2+1)} .$$

1°. Find polerne for f, deres orden og de tilhørende residuer.

2°. Udregn kurveintegralet

$$\int_{\partial K(0,1)} f(z)\,dz$$

(idet det er underforstået, at kurven gennemløbes en gang mod uret).

(opgaven fortsættes)

(opgave 2 fortsat)

3°. For $a \in \mathbb{C}$ betragtes den holomorfe funktion

$$g_a(z) = \sin z - \frac{z}{3}(a + \cos z) , \quad z \in \mathbb{C} .$$

Find ordenen af nulpunktet $z = 0$ for g_a som funktion af $a \in \mathbb{C}$.

Opgave nr. 3

Betragt problemet

$$\begin{cases} -u''(x) - \alpha u(x) = x , & x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 , & \end{cases}$$

hvor $\alpha > 0$.

1°. Bestem mængden S af de tal $\alpha > 0$, for hvilke problemet har en entydig løsning.

2°. Find løsningen til problemet, når $\alpha \in S$.

Opgave nr. 4

Betragt problemet

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = F(x,y) , & \text{i} \quad \Omega =]0,\pi[\times]0,\pi[\\ u = 0 \quad \text{på} \quad \partial\Omega . & \end{cases}$$

1°. Vis, at $u(x,y) \geq 0$ i Ω, hvis $F(x,y) \geq 0$ i Ω.

2°. Find løsningen for $F(x,y) = \sin^3 x \sin y$.