Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000

Matematik 2KF Kompleks funktionsteori

Velkommen til denne tre timers eksamen. Eksamenssættet består af fire opgaver. Alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnere og andet elektronisk udstyr må ikke anvendes. Som udgangspunkt tillægges alle opgaverne lige vægt ved bedømmelsen.

Notation

- $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$.
- $\overline{D(a,r)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$.
- $\partial D(a,r) = \overline{D(a,r)} \setminus D(a,r)$.
- Kædereglen siger, at $(f_2 \circ f_1)'(z) = f_2'(f_1(z))f_1'(z)$.
- Med $\mathrm{Log}(w)$ betegner vi hovedlogaritmen til w. Denne funktion er analytisk i den opskårne plan $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000

Opgave 1

Lad γ betegne enhedscirklen gennemløbet én gang mod uret. Lad h være en analytisk funktion i $D(0,2)$ og definer

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\exp(h(\xi))}{(\xi - z)^2}\,d\xi, \qquad \text{for } |z| \neq 1.$$

1. Vis, at
$$H(z) = \begin{cases} h'(z)\exp(h(z)) & \text{for } |z| < 1, \\ 0 & \text{for } |z| > 1. \end{cases}$$

2. Vis, at hvis $h(z) = \operatorname{Log}(z+2)$, så er $H(z) = 1$ for alle $z \in D(0,1)$.

3. Vis, at hvis $h(0) = 0$, og $|h'(z)| \leq 2$ for $|z| = 1$, så er
$$|H(z)| \leq 2\exp(2|z|) \qquad \text{for } |z| < 1.$$
Vink: brug eventuelt formlen
$$h(z) - h(0) = \int_{[0,z]} h'(\xi)\,d\xi.$$

Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000

Opgave 2

Lad R være bestemt ved forskriften

$$R(z) = \frac{z + 1/z}{z^2 + 4z + 1}.$$

1. Vis, at 0 er en pol for R og bestem den tilhørende orden. Find de øvrige poler for R med tilhørende ordener. Eftervis specielt, at R har netop en pol p i intervallet $]-1, 0[$.

2. Skitser polernes beliggenhed i den komplekse plan. Begrund endvidere, at der findes et positivt tal r, så

   $$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+1)^n$$

   gælder for alle $z \in D(-1, r)$ (med en passende følge $\{c_n\}$). Bestem, gerne ud fra skitsen, det størst mulige r med denne egenskab.

3. Vis, at

   $$\mathrm{Res}(R, 0) = 1,$$

   og at

   $$\mathrm{Res}(R, p) = -\frac{2}{\sqrt{3}},$$

   hvor p er den pol, som er nævnt i spørgsmål 1.

4. Bestem herved værdien af integralet

   $$\int_0^{2\pi} \frac{2\cos x}{2 + \cos x}\, dx.$$

Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000

Opgave 3

Lad C_1 være cirklen med centrum i 0 og radius 1, og lad C_2 være cirklen med centrum i $1+i$ og radius 1.

1. Skitser C_1 og C_2 og godtgør, at disse kurver skærer hinanden i to forskellige punkter. Bestem, gerne ud fra skitsen, den vinkel, som kurverne skærer hinanden med i hvert af disse punkter.

Lad videre afbildningen φ være bestemt ved

$$\varphi(z) = i\frac{1+z}{1-z}.$$

2. Find billederne ved φ af C_1 og C_2. Vis specielt, at disse billedkurver skærer hinanden i netop et punkt i den komplekse plan. Bestem endvidere den vinkel, som billedkurverne skærer hinanden med. Illustrer med en skitse.

Lad $A = D(0,1) \setminus \overline{D(1+i,1)}$.

3. Identificer A og $\varphi(A)$ på dine skitser. Afgør, om $\varphi(A)$ er åben og/eller begrænset.
4. Vis, at φ^{-1} afbilder den øvre halvplan $\{x+iy \,|\, y>0\}$ konformt på $D(0,1)$.

Lad nu afbildningerne g og h være bestemt ved

$$g(z) = z^2,$$

$$h(z) = z+1.$$

5. Angiv ved hjælp af afbildningerne φ, φ^{-1}, g og h en konform afbildning f af A på $D(0,1)$.

Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000

Opgave 4

For $a \in \mathbb{C}$ defineres

$$g_a(z) = \frac{z-a}{1-az}, \quad z \in D(0,1).$$

1. Begrund, at g_a er en automorfi af $D(0,1)$ for hvert $a \in]-1,1[$.

2. Undersøg, om $g_{\frac{i}{2}}$ er en automorfi af $D(0,1)$.

3. Lad $a, b \in]-1,1[$. Vis formlen

$$(g_a \circ g_b)(z) = g_c(z),$$

hvor $c = (a+b)/(1+ab\,)$.

Vi lader nu $\{a_n\}$ være en følge af tal i intervallet $]-1,1[$ og antager, at a_n konvergerer mod 1 for n gående mod uendeligt. Vi sætter videre

$$f_n(z) = g_{a_n}(z),$$

for $n \geq 1$.

4. Vis, at $f_n \to -1$ for $n \to \infty$ uniformt på kompakte delmængder af $D(0,1)$. *Vink: du kan nøjes med at betragte en vilkårlig afsluttet cirkelskive* $\overline{D(0,r)}$, *hvor* $r < 1$. *Brug dernæst omskrivningen*

$$f_n(z) + 1 = \frac{(1+z)(1-a_n)}{1-a_n z},$$

og find bl.a. en nedre grænse for nævneren, udtrykt ved r.