Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999

Matematik 2KF Kompleks funktionsteori

Velkommen til denne tre timers eksamen. Eksamenssættet består af fire opgaver. Opgaverne er formuleret på dansk og på engelsk. Alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnere og andet elektronisk udstyr må ikke anvendes. Den engelske version begynder på side 4.

Mathematics 2KF Complex Analysis

Welcome to this three hours exam. It consists of four problems. Each of the problems is formulated in Danish and in English. You may use books, notes and other written material. Electronic devices may not be used. The English version begins on page 4.

Dansk version

Notation

I de følgende opgaver bruges notationen $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| < r\}$. Endvidere erindres om, at en pol af orden 1 kaldes en simpel pol.

Opgave 1

Lad γ betegne enhedscirklen gennemløbet én gang mod uret. Lad f være en analytisk funktion i $D(0,2)$ og definer

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z-w}{z+w} f(z)\, dz, \qquad (*)$$

for $|w| \neq 1$.

1. Vis, at
$$F(w) = \begin{cases} -2wf(-w) & , |w| < 1, \\ 0 & , |w| > 1, \end{cases}$$
og begrund, at F er analytisk i $\mathbb{C} \setminus \{w \,|\, |w| = 1\}$. Vink: $z - w = z + w - 2w$.

Opave 1 fortsættes på næste side

2. Antag, at $f(0) = 1/2$ og $|f(z)| \leq 1$ for $|z| = 1$. Vis at $|F(w)| < 2|w|$ for alle $w \in D(0,1) \setminus \{0\}$. Vink: vis først, at $|f(z)| < 1$ for $|z| < 1$.

3. Findes der en analytisk funktion f i $D(0,2)$ sådan, at F defineret ved $(*)$ opfylder $F(w_n) = \cos w_n$ for en følge $\{w_n\}$ i $D(0,1)$ med $|w_n - 1/2| = 1/n$ for alle n?

Opgave 2

Lad $f(z) = 1/(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.

1. Godtgør, at f er en meromorf funktion i den komplekse plan, og bestem antallet af poler for f (regnet med multiplicitet).

2. Find polerne for f og skitser deres beliggenhed i den komplekse plan. Vis specielt, at f ikke har nogen poler på den reelle akse, og at der er netop to simple poler p_1 og $p_2 = p_1^2$ i den øvre halvplan. Vink: udregn $(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.

3. Vis, at
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4 + x^3 + x^3 + x + 1}\, dx = \frac{4\pi \sin(2\pi/5)}{5},$$
idet du godt må bruge, at
$$\operatorname{Res}(f, p_1) = (e^{4\pi i/5} - e^{2\pi i/5})/5, \qquad (**)$$
og at $\operatorname{Res}(f, p_2) = (e^{8\pi i/5} - e^{4\pi i/5})/5$.

4. Eftervis formlen $(**)$. Vink: brug eventuelt vinket fra spørgsmål 2 i denne opgave.

Opgave 3

Lad
$$T(z) = \frac{3+z}{2-z}.$$

1. Find billedet ved T af den øvre halvplan.

Opave 3 fortsættes på næste side

Lad nu C være cirklen med centrum i 1 og radius 1, og lad l være den rette linje med hældning 1, som går igennem punktet 2.

2. Skitser C og l og godtgør, at disse kurver skærer hinanden i to forskellige punkter. Bestem den vinkel, som kurverne skærer hinanden med i hvert af disse punkter.

3. Bestem billederne ved T af C og l og vis, at disse billedkurver skærer hinanden i netop et punkt i den komplekse plan. Bestem endvidere den vinkel, som billedkurverne skærer hinanden med. Illustrer med en skitse.

4. Kurverne C og l afgrænser en begrænset åben mængde O indeholdt i den nedre halvplan. Identificer O og $T(O)$ på dine skitser. Er $T(O)$ åben? Er $T(O)$ begrænset?

5. Lad nu $f(z) = T(z)\sin(\pi z)$. Vis, at f kan udvides til en hel funktion F. Gælder uligheden $|F(z)| \leq 1000 + |z|^{1000}$ for alle komplekse tal z?

Opgave 4
Lad G være et (ikke tomt) område og antag, at $\{f_n\}$ er en følge af analytiske funktioner i G. Antag videre, at $f_n \to f$ for $n \to \infty$ uniformt på kompakte delmængder af G, hvor f er en funktion defineret i G.

1. Begrund, at f er uendeligt ofte differentiabel i G. Formuler endvidere en betingelse på G, som er tilstrækkelig til at sikre, at der findes en analytisk funktion F i G, så $F' = f$.

2. Lad $a \in G$ og lad $\{a_n\}$ være en følge fra G så $a_n \to a$ for $n \to \infty$. Vis, at $f_n'(a_n) \to f'(a)$ for $n \to \infty$.

3. Lad nu
$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$
Vis, at $g_n'(\pi/2 + 2^{-n}) \to -1$ for $n \to \infty$. Vink: Argumenter først for, at $\{g_n\}$ konvergerer uniformt på kompakte delmængder af den komplekse plan mod en funktion g, og bestem denne.

Opave 4 fortsættes på næste side

4. Antag, at $G = \mathbb{C}$, og at ingen af funktionerne f_n er nulfunktionen. Lad
$$A = \{z \in D(0,1) \mid f_n(z) = 0 \text{ for et eller andet } n\}.$$
Vis, at A er en endelig mængde, hvis f ikke har nogen nulpunkter i $\overline{D(0,1)}$.

English version

Notation

In the following problems the notation $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ is used. Furthermore, recall that a simple pole is a pole of order 1.

Problem 1

We let γ denote the unit circle traversed once in the counter-clockwise direction. Let f be an analytic function in $D(0,2)$ and define
$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z-w}{z+w} f(z)\, dz, \qquad (*)$$
for $|w| \neq 1$.

1. Show that
$$F(w) = \begin{cases} -2wf(-w) & , |w| < 1, \\ 0 & , |w| > 1, \end{cases}$$
and argue that F is analytic in $\mathbb{C} \backslash \{w \mid |w| = 1\}$. Hint: $z-w = z+w-2w$.

2. Suppose that $f(0) = 1/2$ and $|f(z)| \leq 1$ for $|z| = 1$. Show that $|F(w)| < 2|w|$ for all $w \in D(0,1)\backslash\{0\}$. Hint: first show that $|f(w)| < 1$ for $|z| < 1$.

3. Does there exist an analytic function f in $D(0,2)$ so that F defined by $(*)$ has the property $F(w_n) = \cos w_n$ for a sequence $\{w_n\}$ in $D(0,1)$ such that $|w_n - 1/2| = 1/n$ for all n?

Problem 2

Let $f(z) = 1/(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.

1. Argue that f is a meromorphic function in the complex plane and find the number of poles for f (counting multiplicities).

Problem 2 continues on the next page

2. Find the poles of f and make a figure to show their location in the plane. In particular, show that f has no poles on the real line and that there are exactly two simple poles p_1 and $p_2 = p_1^2$ in the upper half-plane. Hint: compute $(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$.

3. Show that
$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+x^3+x^3+x+1}\,dx = \frac{4\pi\sin(2\pi/5)}{5}.$$
You are allowed to use that
$$\mathrm{Res}(f,p_1) = (e^{4\pi i/5} - e^{2\pi i/5})/5 \qquad (**)$$
and that $\mathrm{Res}(f,p_2) = (e^{8\pi i/5} - e^{4\pi i/5})/5$.

4. Verify the formula $(**)$. Hint: one can use the hint given in question 2 of this problem.

Problem 3
Let
$$T(z) = \frac{3+z}{2-z}.$$

1. Find the image under T of the upper half-plane.

Let C be the circle centered at 1 and with radius 1 and let l be the straight line of slope 1 and passing through the point 2.

2. Make a sketch of C and l and verify that these curves intersect at two different points. Find the angle of intersection of the curves at each of these points.

3. Find the images under T of C and l and show that these image curves intersect at exactly one point in the complex plane. Furthermore, find the angle of intersection of the image curves at that point. Illustrate with a sketch.

4. The curves C and l bound an open and bounded set O contained in the lower half-plane. Identify O and $T(O)$ on your sketches. Is $T(O)$ open? Is $T(O)$ bounded?

Problem 3 continues on the next page

5. Put $f(z) = T(z)\sin(\pi z)$. Show that f can be extended to an entire function F. Does the inequality $|F(z)| \le 1000 + |z|^{1000}$ hold for all complex numbers z?

Problem 4

Let G be a (non-empty) region and suppose that $\{f_n\}$ is a sequence of analytic functions in G. Suppose that $f_n \to f$ for $n \to \infty$ uniformly on compact subsets of G, where f is a function defined in G.

1. Argue that f is infinitely often differentiable in G. Furthermore, give a condition on G, sufficient for the existence of an analytic function F in G satisfying $F' = f$.

2. Let $a \in G$ and let $\{a_n\}$ be a sequence from G such that $a_n \to a$ for $n \to \infty$. Show that $f_n'(a_n) \to f'(a)$ for $n \to \infty$.

3. Put
$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
Show that $g_n'(\pi/2 + 2^{-n}) \to -1$ for $n \to \infty$. Hint: first argue that the sequence $\{g_n\}$ converges uniformly on compact subsets of the complex plane to a function g. Identify g.

4. Suppose that $G = \mathbb{C}$ and that no function f_n is identically equal to zero. Let
$$A = \{z \in D(0,1) \mid f_n(z) = 0 \text{ for some } n\}.$$
Show that A is a finite set if f has no zeros in $\overline{D(0,1)}$.