Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999

Matematik 2 KF (Kompleks funktionsteori)

Opgavesæt til besvarelse i 3 timer. De fem opgaver vægtes ligeligt ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnere og andet elektronisk udstyr må ikke anvendes.

Opgave 1

Vejen γ defineres ved $\gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
Beregn det komplekse vejintegral

$$\int_\gamma \frac{\cos(2\pi z)}{z - \frac{1}{2}} \, dz,$$

hvor det antages at vejen gennemløbes en gang mod uret.

Hvilken værdi har vejintegralet hvis γ erstattes af vejen δ givet ved $\delta(t) = \frac{1}{4}\cos t - 4i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ som gennemløbes en gang med uret? *Vink:* Lav en skitse.

Opgave 2

Lad $f(z) = \exp(iz)$, $z \in \mathbb{C}$. Bestem billedet under f af den åbne strimmel

$$\Omega = \{x + iy \mid -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\}.$$

Lad endvidere l_1 være linjestykket mellem $-\frac{\pi}{4}$ og $\frac{\pi}{4}$ og lad l_2 være linjen givet ved den imaginære akse. Begrund at billedkurverne under f af l_1 og l_2 skærer hinanden i netop et punkt og bestem den vinkel som disse kurver skærer hinanden med.
Findes der en lodret strimmel $\Omega_a = \{x + iy | -a < x < a\}$, hvor $0 < a < \infty$, sådan at $f(\Omega_a)$ *ikke* er åben?

Opgave 3

Lad $D = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < 1\}$ og $E = \{z \in \mathbb{C} \big| |z - 1| < 2\}$.
Lad $f : D \to E$ være en injektiv analytisk funktion af D på E som opfylder $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f'(0) = -\frac{3}{2}$. Find en formel for $f(z)$. Er der mere end *én* injektiv analytisk funktion af D på E som opfylder ovenstående? *Vink.* Betragt $g(z) = (f(z) - 1)/2$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4

Betragt den meromorfe funktion f i hele den komplekse plan givet ved

$$f(z) = \frac{\sinh z}{\sin z}.$$

Vis, at $f(iz) = 1/f(z)$. Bestem endvidere alle nulpunkter (med tilhørende multipliciteter), poler (med tilhørende ordener) og hævelige singulariteter for f. Funktionen $\sinh z$ er defineret som $\frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z))$.

Opgave 5

Lad $u(x,y)$ være en harmonisk funktion i $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
Vis, at

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta) d\theta.$$

Vink: Lad $f(x+iy)$ være en analytisk funktion i D der har $u(x,y)$ som realdel. Betragt så funktionen $f(z)/z$.

Brug denne formel til at slutte at hvis $u(0,0) = 0$, da må der findes punkter (x,y) på cirklen med centrum $(0,0)$ og radius $\frac{1}{2}$ så $u(x,y) \geq 0$.

Hvilken sætning minder dette dig om?