

MATEMATIK 2 KF (KOMPLEKS FUNKTIONSTEORI)

Opgavesæt til besvarelse i 3 timer. De fem opgaver vægtes ligeligt ved bedømmelsen.
Alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt.
Lommeregnerne må ikke anvendes.

OPGAVE 1.

Vejen γ defineres ved $\gamma(t) = \frac{3}{2}t^2 + i(2t + 1)^{3/2}$, $0 \leq t \leq 1$.
Beregn længden af γ , og vis derpå, at

$$\left| \int_{\gamma} \exp(\bar{z}) dz \right| \leq \frac{9}{2}e^{3/2}.$$

OPGAVE 2.

Lad $f \in H(\mathbb{C})$ og lad $\lambda \in \mathbb{C}$.

Vis, at hvis $f(1/z) \rightarrow \lambda$ for $z \rightarrow 0$, så er $f(z) = \lambda$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

OPGAVE 3.

Lad m være et helt positivt tal, og lad

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^m}, \quad z \neq 0.$$

Bestem de værdier af m , for hvilke f har en stamfunktion i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, og find, for disse værdier, Laurenttrækken for en sådan stamfunktion.

OPGAVE 4.

Vis ved hjælp af residueregning, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

OPGAVE 5.

Lad $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ og lad $f, g \in H(U)$, hvor g er injektiv. Antag at:

$$f(U) \subseteq g(U); \quad f(0) = g(0); \quad \text{og} \quad |f'(0)| = |g'(0)|.$$

Vis, at der findes et $\lambda \in \mathbb{C}$ med $|\lambda| = 1$, således at

$$f(z) = g(\lambda z), \quad z \in U.$$

[Vink: Anvend Schwartz' lemma på $g^{-1} \circ f$.]