Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen
Januar 1998

MATEMATIK 2 KF (KOMPLEKS FUNKTIONSTEORI)

Opgavesæt til besvarelse i 3 timer. De fem opgaver vægtes ligeligt ved bedømmelsen.
Alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt.
Lommeregnere og andet elektronisk udstyr må ikke anvendes.

OPGAVE 1.

Vejen γ defineres ved $\gamma(t) = 2e^{\mathrm{i}t}, \quad 0 \le t \le 2\pi$.
Beregn de komplekse vejintegraler

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^{17}} dz \quad \text{og} \quad \int_\gamma \tan z \, dz.$$

OPGAVE 2.

Lad $D = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}t \ : -1 \le t \le 1\}$, lad $S = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$, og lad

$$f(z) = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Log}\Big(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\Big), \quad z \in D.$$

Vis, at $f \in H(D)$, og bestem f'. Opskriv derpå Taylorrækken for en funktion $g \in H(S)$ som opfylder at $g' = f'$ på $D \cap S$.

OPGAVE 3.

Lad $S = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$, og lad $f, g \in H(\mathbb{C})$. Antag, at f og g ikke har nulpunkter i S, og at

$$\frac{f'(1/n)}{f(1/n)} = \frac{g'(1/n)}{g(1/n)} \quad \text{for} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Vis, at der findes et $\lambda \in \mathbb{C}$, således at $f(z) = \lambda g(z)$ for alle $z \in \mathbb{C}$.
[Vink: Vis først, at $f'g - fg' = 0$ på S.]

OPGAVE 4.

Find samtlige nulpunkter, hævelige singulariteter og poler i $\mathbb{C}$ for funktionen

$$f(z) = \frac{\tan z}{z}.$$

OPGAVE 5.

Lad $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være harmonisk konjugerede. Vis, at uv er harmonisk, og bestem en harmonisk konjugeret til uv.