Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen
Juni 1997

MATEMATIK 2 KF (KOMPLEKS FUNKTIONSTEORI)

Opgavesæt til besvarelse i 3 timer. De fem opgaver vægtes ligeligt ved bedømmelsen.
Alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt.
Lommeregnere må ikke anvendes.

OPGAVE 1.

Vejen γ defineres ved $\gamma(t) = 2 + 2e^{\mathrm{i}t},\ 0 \le t \le 2\pi$.
Beregn det komplekse vejintegral

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{Log}(z+\mathrm{i})}{z-1}\, dz.$$

Værdien skal angives på formen $x + \mathrm{i}y$, hvor x og y er reelle tal.

OPGAVE 2.

Lad $f(z) = z^2 + 3z - 1,\ z \in \mathbb{C}$. Bestem maksimum af funktionens modulus $|f|$ i punktmængden $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$. [Vink: Vis først, at $|f(e^{\mathrm{i}t})|^2 = 11 - 2\cos 2t,\quad t \in \mathbb{R}$.]

OPGAVE 3.

Lad $D \subseteq \mathbb{C}$ være et område, og lad f være en meromorf funktion på D. Vis, at f' er meromorf på D, og at f og f' har de samme poler i D. Hvis $z_0 \in D$ er en pol af orden m for f, hvad er da ordenen af z_0 som pol for f' ?

OPGAVE 4.

Vis ved hjælp af residueregning, at

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + 2\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

OPGAVE 5.

Lad $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ og $\partial U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Vis, at hvis $f \in H(\mathbb{C})$ opfylder, at $|f(z)| < 1$ for alle $z \in \partial U$, så har f netop ét fixpunkt i U (dvs. $f(z_1) = z_1$ for netop ét $z_1 \in U$).