MATEMATIK 2 KF (KOMPLEKS FUNKTIONSTEORI)

Opgavesæt til besvarelse i 3 timer. De fem opgaver vægtes ligeligt ved bedømmelsen.
Alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt.
Lommeregnere må ikke anvendes.

OPGAVE 1.

Vejen γ defineres ved

$$\gamma(t) = 2e^{\mathrm{i}t}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Beregn de komplekse vejintegraler

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{1+z}dz \quad \text{og} \quad \int_\gamma \frac{\cos z}{3+z}dz.$$

OPGAVE 2.

Lad $f, g \in H(\mathbb{C})$. Antag, at $|f(z)| < |g(z)|$ for alle $z \in \mathbb{C}$.
Vis, at der findes et $\lambda \in \mathbb{C}$ således at $f(z) = \lambda g(z)$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

OPGAVE 3.

Lad a være et komplekst tal. Funktionen f defineres ved

$$f(z) = (az^{-2} + z^{-4})\sin z, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Gør rede for, at f har en stamfunktion i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ for præcis een værdi af a,
og bestem Laurent-rækken for en sådan stamfunktion.

OPGAVE 4.

Funktionen g defineres ved $g(z) = 3z^2 + e^{-z}$ for alle $z \in \mathbb{C}$.
Vis, at g har præcis to forskellige nulpunkter i cirkelskiven $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
[*Vink:* Vis først, fx. vha. Rouché's sætning, at der er to nulpunkter (talt med multiplicitet).]

OPGAVE 5.

Lad $f \in H(\mathbb{C})$ og lad $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$\varphi(x,y) = |f(x+\mathrm{i}y)|^2 \quad \text{for alle} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Vis, at hvis φ er harmonisk, så er f konstant.