

MATEMATIK 2 KF (KOMPLEKS FUNKTIONSTEORI)

Opgavesæt til besvarelse i 3 timer. De fem opgaver vægtes ligeligt ved bedømmelsen. Alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnere må ikke anvendes.

OPGAVE 1.

Vejen γ defineres ved $\gamma(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Beregn de komplekse vejintegraler

$$\int_{\gamma} \operatorname{Log} z \, dz \quad \text{og} \quad \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log} z}{(z-i)^2} \, dz.$$

OPGAVE 2.

Lad γ være en lukket kurve i $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, og sæt

$$J_{\gamma} = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{1-z^2}.$$

Gør rede for, at J_{γ} er et helt tal. [Vink: udtryk J_{γ} ved $w(\gamma, -1)$ og $w(\gamma, 1)$.]

OPGAVE 3.

Funktionen f defineres ved $f(z) = z^{-1}e^z + (z-2)^{-1}z^2$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$.

Vis, at f er meromorf i \mathbb{C} , og bestem Laurenttrækken for f i ringområdet $0 < |z| < 2$.

OPGAVE 4.

Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} \, dx = \frac{\pi}{e}.$$

OPGAVE 5.

Punktmængden S defineres ved $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Vis, at hvis $f \in H(\mathbb{C})$ opfylder betingelserne

- (i) $|f(z)| > 1$ for $|z| = 1$
- (ii) Der findes $z_1 \in S$ med $f(z_1) = 1$

så har f mindst et nulpunkt i S .