Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2002

Matematik 2kf

Velkommen til denne tre timers eksamen, som kan regnes på baggrund af pensum for efteråret 2001 (Christian Bergs noter) eller på baggrund af Stewart og Talls bog, der blev brugt efteråret 2000. Den forklarende tekst i parentes i opgaverne refererer især til sprogbrugen i Stewart og Tall.

Ved eksamen er alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o. lign.) tilladt. Lommeregnere og andet elektronisk udstyr må ikke anvendes.

Eksamenssættet består af 4 opgaver og er på 2 sider. Et fuldstændigt besvaret eksamenssæt tildeles 100 point. De enkelte opgavers pointfordeling fremgår nedenfor.

Opgave 1 (25 points)

Lad Log betegne hovedlogaritmen i området $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$, og lad $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{C}$ være vejen (kurven) $\gamma(t) = 1 + t(i - 1)$.

1) Udregn kurveintegralet

$$\int_\gamma \frac{dz}{z}$$

og bestem argumentvariationen argvar(γ) langs γ. (I Stewart og Talls bog optræder symbolet argvar(γ) ikke. Det er per definition lig med $\theta(1) - \theta(0)$, hvor θ er et kontinuert valg af argument langs γ.)

2) Gør rede for, at

$$f(z) = z\mathrm{Log}(z) - z$$

er en stamfunktion til Log(z) i området $\mathbb{C}_\pi$.

3) Vis, at

$$\int_\gamma \mathrm{Log}(z)\, dz = 1 - \frac{\pi}{2} - i.$$

Opgave 2 (25 points)

Det antages at $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ er holomorf (analytisk) og for $z \in \mathbb{C}$ defineres

$$F(z) = \int_0^1 f(tz)z\, dt.$$

1) Gør rede for, at der for $z \in \mathbb{C}$ og enhver vej γ_z fra 0 til z gælder

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f,$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

og at F er en stamfunktion til f.

I resten af opgaven antages, at

$$F(\frac{1}{n}) = \sin(\frac{\pi}{n}),\ n = 1, 2, \ldots .$$

2) Vis, at $F(z) = \sin(\pi z)$ for $z \in \mathbb{C}$.

3) Find værdien af $f(0)$.

Opgave 3 (25 points)

Betragt funktionen

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}.$$

1) Gør rede for, at f er holomorf (analytisk) i hele $\mathbb{C}$, idet der er en hævelig singularitet for $z = 0$. Find værdien $\lim_{z\to 0} f(z)$.

2) Find Taylorrækken for f med centrum 0 og find dens konvergensradius.

3) Idet $C(t) = \exp(it), t \in [0, 2\pi]$ skal man vise, at

$$\int_C \frac{f(z)}{z^2}\, dz = 0.$$

Opgave 4 (25 points)

Betragt funktionen

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2 - 4iz - 3)}.$$

1) Find f's poler i $\mathbb{C}$ og deres orden.

2) Udregn residuerne i de fundne poler.

3) Vis, at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dx}{(x^2+1)(x^2 - 4ix - 3)} = i\frac{\pi}{8}.$$