Københavns Universitet Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 2000/2001

Matematik 2KF Kompleks funktionsteori

Velkommen til denne tre timers eksamen. Alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt. Lommeregnere og andet elektronisk udstyr må ikke anvendes.

Et fuldstændigt besvaret eksamenssæt tildeles 100 point. De enkelte opgavers pointfordeling fremgår neden for.

Der må kun afleveres en af opgaverne 4 eller 5 til bedømmelse. Opgave 4 vedrører pensum for efterårssemestret 2000 (med Christian Berg), mens Opgave 5 vedrører pensum for forårssemestret 2000 (med Henrik L. Pedersen). Øverst på opgavebesvarelsens forside bedes påført navnet Christian Berg eller Henrik L. Pedersen som angivelse af hvilket pensum man går op efter.

Københavns Universitet Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 2000/2001

Opgave 1 (30 point).

Betragt potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

1.1 Bestem konvergensradius R.

1.2 Lad $f(z)$ betegne summen af rækken for $|z| < R$. Vis, at

$$f'(z) = -\frac{\mathrm{Log}(1-z)}{z} \qquad \text{for } |z| < 1,$$

og gør rede for, at højresiden har en hævelig singularitet for $z = 0$. Her betegner Log hovedlogaritmen.

1.3 Lad nu C betegne vejen $t \mapsto e^{it}/2, t \in [0, 2\pi]$. Udregn integralet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mathrm{Log}(1-z)}{z}\, dz.$$

Opgave 2 (20 point).

For $a \in \mathbb{C}$ betragtes den hele funktion

$$g_a(z) = \sin z - \frac{z}{3}\,(a + \cos z)\,.$$

Find potensrækken omkring $z = 0$ for g_a og bestem for hvert a ordenen af nulpunktet $z = 0$ for g_a.

Opgave 3 (20 point).

Lad $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ være et område og lad f og g være holomorfe i $\mathcal{D}$. Vis, at hvis $f(z)g(z) = 0$ for alle $z \in \mathcal{D}$ så gælder $f(z) = 0$ for alle $z \in \mathcal{D}$ eller $g(z) = 0$ for alle $z \in \mathcal{D}$.

Københavns Universitet Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 2000/2001

Opgave 4 (30 point).

4.1 Vis, at funktionen $\tan(\pi z)$ er holomorf i området

$$\mathcal{D} = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, -1/2 < \mathrm{re}(z) < 1/2 \}$$

og skitser $\mathcal{D}$.

4.2 Vis, at funktionen

$$f(z) = \frac{\tan(\pi z)}{z^2(4z^2 - 5z + 1)}$$

har to poler i $\mathcal{D}$ og find disse og deres orden.

4.3 Lad γ betegne randen af kvadratet med hjørner $\pm 1/3 \pm i/3$ gennemløbet én gang mod uret. Find

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Opgave 5 (30 point).

Vi sætter

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = i \frac{\cos iz}{\sin iz}.$$

5.1 Vis, at

$$\coth z = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}.$$

5.2 Vis, at coth er en konform afbildning af den vandrette strimmel

$$S = \{ z \in \mathbb{C} \,|\, \pi/4 < \mathrm{im}(z) < 3\pi/4 \}$$

på den åbne enhedsdisk. *Vink: find først billedet af strimmelen ved $z \mapsto e^{2z}$ og udnyt så resultatet i 5.1.*

5.3 Vi lader nu f være en vilkårlig holomorf funktion i S som opfylder, at $|f(z)| \leq 1$ for alle $z \in S$. Vis, at hvis $f(i\pi/2) = 0$, så gælder

$$|f(z)| \leq |\coth z|$$

for alle $z \in S$.