

Matematik 2 KF (Kompleks funktionsteori)

Opgavesæt til besvarelse i 3 timer. De 4 opgaver vægtes ligeligt ved bedømmelsen.
Alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o.lign.) er tilladt.
Lommeregnere og andet elektronisk udstyr må ikke anvendes.

Opgave 1

Lad V betegne den opskårne plan $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ og definér

$$f(z) = \sin(-i \operatorname{Log} z), \quad z \in V.$$

1.1 Begrund at $f \in H(V)$ og vis at

$$f(z) = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad z \in V.$$

Vis herved, at f har en meromorf udvidelse F til hele den komplekse plan.

1.2 Bestem alle poler (med orden) og nulpunkter (med multiplicitet) for F .

1.3 Om en ukendt funktion h vides det, at $h \in H(D(0, 3))$ og at $|h(z)| \leq \frac{1}{2}$ for $|z| \leq 2$.

Bestem antallet af nulpunkter og poler for

$$f(z) + h(z)$$

i mængden $|z| < 2$.

Vink:

1.4 Vis, at der findes $r > 0$ sådan, at $f : D(1, r) \rightarrow \mathbb{C}$ er injektiv.

Findes der også $s > 0$ så $f : D(i, s) \rightarrow \mathbb{C}$ er injektiv?

Opgave 2

Nedenstående figur viser grafen for funktionen

$$t \mapsto |\cos(\cos t + i \sin t) - 1|, \quad t \in [0, 2\pi].$$

GRAF

2.1 Beskriv hvilken relevans ovenstående graf har i forbindelse med at bestemme tallet

$$C = \max_{|z| \leq 1} |\cos(z) - 1|.$$

Bestem tallet C ved hjælp af grafen.

2.2 Kan man også bruge grafen til at bestemme

$$\max_{|z| \leq 1} \left| \frac{\cos z - 1}{z} \right| ?$$

2.3 Lad nu

$$f_n(z) = \cos \left(\frac{z - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n} \cdot z} \right)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}, n \geq 2.$$

Begrund, at $f_n \in H(D(0, \frac{3}{2}))$ og, at der gælder

$$\max_{|z| \leq 1} |f_n(z)| \leq C$$

for alle $n \geq 2$.

2.4 Afgør, hvilken type singularitet

$$f(z) = \cos \left(\frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} \cdot z} \right)^{-1}$$

har i $z = 2$.

Vink: Man kan eventuelt bestemme en følge $\{z_k\}$ af tal forskellige fra 2 som konvergerer mod 2 og hvor

$$\frac{z_k - \frac{1}{2}}{1 - z_k \frac{1}{2}} = 2n\pi.$$

Opgave 3

I nedenstående figur er skitseret tre cirkler

C_1 : enhedscirklen

C_2 : cirklen med centrum $2i$ og radius 3

C_3 : cirklen med centrum $-2i$ og radius 3.

GRAF

Lad endvidere $f(z) = \frac{1}{z}$.

3.1 Beskriv billedmængderne af hver af de tre cirkler ved afbildningen f . Bestem en vinkel som billedkurverne $f(C_1)$, $f(C_2)$ skrærr hinanden med.

Lav en skitse.

3.2 Begrund at $f(\mathcal{D})$ må være indeholdt i $D(0, 1)$ og anfr billedet ved f af det skraverede område \mathcal{D} på din skitse.

3.3 Findes der en bilinear transformation $\mathcal{T}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (med $ad - bc \neq 0$) sådan de tre cirkler afbildes på tre linjer?

3.4 Findes der en konform afbildning φ af \mathcal{D} på $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Vink: Betragt i givet fald φ^{-1} og undersøg singulariteten 0.