Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1996/97
Fredag den 31. januar 1997, kl. 9–13

Matematik 2DMI (fuldt pensum)

Opgaver til besvarelse i fire timer. Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregner, kan medbringes. Opgavesættet består af fire opgaver (to sider). Besvarelsen bedømmes som en helhed.

Opgave 1

(a) Opskriv den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x(t) \quad \text{for} \quad t \in [0, \infty[.$$

Lad A og b være givet som

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestem spektret $\sigma(A)$ for A og angiv en basis for $\mathbf{R}^4$ bestående af egenvektorer for A.

(c) Angiv den fuldstændige løsning til det homogene differentialligningssystem

$$x'(t) = Ax(t) \quad \text{for} \quad t \in [0, \infty[,$$

og bestem mængden af ligevægtstilstande for systemet

$$x'(t) = Ax(t) + b \quad \text{for} \quad t \in [0, \infty[. \tag{1}$$

(d) Diskuter kort stabilitetsforholdene for de fundne ligevægtstilstande til (1).

Opgave 2

Betragt tredje ordens differensligningen med konstante koefficienter

$$x_{t+3} - 3x_{t+2} + 3x_{t+1} - x_t = 0 \quad \text{for} \quad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

(a) Vis, at et vilkårligt polynomium $p(t) = at^2 + bt + c$, af grad ≤ 2, er løsning til (2).

(b) Angiv den fuldstændige løsning til (2).

(c) Gør rede for, at der findes netop én løsning $x(t)$ til (2) for hvilken $x(0) = x(1) = 0$ og $x(2) = 1$, og angiv denne løsning.

(opgavesættet fortsætter)

Opgave 3

Betragt mængden $\mathbf{Z}$ af hele tal og σ-algebraen $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$ af alle delmængder af $\mathbf{Z}$.

(a) Gør rede for, at *translationsafbildningerne* $\tau_n : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, der for $n \in \mathbf{Z}$ er givet ved

$$\tau_n(x) = x + n, \quad \text{for} \quad x \in \mathbf{Z},$$

er bijektive og målelige mht. $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$, og angiv τ_n^{-1}.

(b) Vis, at *tællemålet* μ på $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$ er translationsinvariant, altså $\tau_n(\mu) = \mu$ for alle $n \in \mathbf{Z}$. (Tællemålet μ er bestemt ved, at $\mu(E) = \infty$ for uendelige mængder $E \subseteq \mathbf{Z}$, og $\mu(E)$ er antallet af elementer i E for endelige delmængder $E \subseteq \mathbf{Z}$.)

(c) Lad ν være et mål på $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$, og antag, at ν er translationsinvariant, altså, at $\tau_n(\nu) = \nu$ for alle $n \in \mathbf{Z}$. Vis, at der findes en konstant $c \in [0, \infty]$ så $\nu = c\mu$.

Opgave 4

Betragt mængden $E \subseteq \mathbf{R}^2$ givet ved,

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0, \text{ eller } y = 0, \text{ eller } |x| + |y| \leq 1\}.$$

(a) Lav en skitse af E, og gør rede for, at E er en ubegrænset Borelmængde.

(b) Bestem integralet af indikatorfunktionen 1_E for mængden E mht. det 2-dimensionale Lebesguemål m_2 på $\mathbf{R}^2$. Beregningen skal begrundes med de resultater fra mål- og integralteorien, der anvendes.

(c) Vis, at følgen (f_n) af funktioner, der for $n = 1, 2, \ldots$ er givet ved

$$f_n(x, y) = 1_E(x - n, y), \quad \text{for} \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

er punktvis konvergent, og angiv grænsefunktionen $f(x, y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x, y)$. Bestem integralerne af f og f_n mht. målet m_2.