Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1997/98
Mandag den 19. januar 1998, kl. 9–13

Matematik 2DMI

Opgaver til besvarelse i fire timer. Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregner, kan medbringes. Opgavesættet består af fem opgaver (to sider). Besvarelsen bedømmes som en helhed.

Opgave 1

(a) Bestem det karakteristiske polynomium og spektret for 4×4 matricen A givet ved

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Angiv den fuldstændige reelle løsning til 4. de ordens differentialligningen

$$x^{(4)}(t) - x(t) = 0 \quad \text{for} \quad t \in [0, \infty[.$$

(c) Lad $b \in \mathbf{R}$ være givet. Gør rede for, at ligningen

$$x^{(4)}(t) - x(t) = b \quad \text{for} \quad t \in [0, \infty[,$$

har en entydigt bestemt ligevægtstilstand, og diskuter kort dens stabilitetsforhold.

Opgave 2

Differensfølgen for en kompleks talfølge $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ er følgen $\Delta\mathbf{x}$, hvis n'te element er $(\Delta\mathbf{x})_n = x_{n+1} - x_n$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$, altså

$$\Delta\mathbf{x} = (x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots).$$

(a) Vis for følger $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, at $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{y}$ hvis og kun hvis der findes en konstant α så

$$x_0 = \alpha, \quad \text{og} \quad x_n = \alpha + \sum_{i=0}^{n-1} y_i, \quad \text{for} \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(b) Gør rede for, at det n'te element af $\Delta(\Delta\mathbf{x})$ er givet ved

$$(\Delta(\Delta\mathbf{x}))_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n, \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

og find dernæst den fuldstændige løsning til den homogene differensligning

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0, \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

(opgaven fortsætter)

(c) Vis, for $n = 1, 2, 3 \ldots$, formlerne

$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{og} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i(i-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

(d) Bestem den fuldstændige løsning til den inhomogene differensligning

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = n, \quad \text{for} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Opgave 3

Lad $\mathcal{K}$ betegne mængden af afsluttede akseparallelle kvadrater i $\mathbf{R}^2$, altså mængder af formen: $[a_1, a_1 + h] \times [a_2, a_2 + h]$, hvor $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$ og $h > 0$.

(a) Gør rede for, at enhver åben delmængde af $\mathbf{R}^2$ er foreningsmængde for en følge af parvis disjunkte mængder fra $\mathcal{K}$, og vis, at σ-algebraen frembragt af $\mathcal{K}$ er Borel-σ-algebraen i $\mathbf{R}^2$.

(b) Vis, at et mål på Borel-σ-algebraen i $\mathbf{R}^2$, hvis værdi på enhver mængde fra $\mathcal{K}$ er kvadratet på sidelængden, er translationsinvariant.

Opgave 4

Lad $(X, \mathcal{E})$ være et målbart rum, med X ikke tom, og lad μ_1 og μ_2 være givne mål på $(X, \mathcal{E})$. Ved fastsættelsen

$$\mu(E) := \mu_1(E) + \mu_2(E) \quad \text{for} \quad E \in \mathcal{E},$$

defineres en afbildning $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$.

(a) Vis, at μ er et mål på $(X, \mathcal{E})$, og at en delmængde af X er en μ-nulmængde hvis og kun hvis den er en μ_i-nulmængde for $i = 1, 2$.

(b) Vis, at der for alle målelige funktioner $f : X \to [0, \infty]$, altså $f \in \mathcal{M}^+$, gælder

$$\int f d\mu = \int f d\mu_1 + \int f d\mu_2.$$

Opgave 5

Betragt punktmængden $P \subseteq \mathbf{R}^3$ givet ved

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1 - x, \text{ og } 0 \le z \le 1 - y\}.$$

(a) Gør rede for, at P er en Borel-mængde i $\mathbf{R}^3$.

(b) Find det 3-dimensional Lebesgue-mål af P.