Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1999
Torsdag den 3. juni 1999, kl. 9–12

Matematik 2DD

Opgavesæt til besvarelse i tre timer, i alt 4 opgaver. Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere, kan medbringes. Besvarelsen bedømmes som en helhed.

Opgave 1

Bestem den fuldstændige reelle løsning til hver af de to differentialligninger

$$(1) \qquad (2+\sin t)x'(t) = x(t)^2 \cos t \ ,$$

$$(2) \qquad t^2 x''(t) + 3tx'(t) - 3x(t) = \ln t, \quad t > 0 \ .$$

Opgave 2

Betragt differentialligningssystemet

$$x_1{}'(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + e^{-t} \ ,$$
$$x_2{}'(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + e^{-t} \ .$$

Find en fundamentalmatrix for det tilsvarende homogene system, og bestem den fuldstændige løsning til systemet.

Opgave 3

Find en formel for A^n for $n \in \mathbb{N}$, hvor $A = \frac{1}{2}I + N$, og

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Angiv den løsning til differensligningssystemet $x(t+1) = Ax(t) + b$, som tilfredsstiller begyndelsesbetingelsen $x(0) = x_0$, hvor

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Vink: Benyt, at b er en egenvektor for A.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4

Find ligevægtspunkterne for det autonome differentialligningssystem

$$x'(t) = -x - y - 1 \ ,$$
$$y'(t) = -2x + y^2 - 5 \ .$$

Undersøg ved linearisering stabiliteten af systemet i de fundne ligevægtspunkter.