EKSAMEN MAT 2DD

Torsdag 25. juni 1998. Tre timer skriftlig eksamen med hjælpemidler. Eksamen har 4 opgaver (skrevet på 2 sider) som hver giver 25 point.

OPGAVE 1:
Find den fuldstændige løsning til 3 af følgende 5 differentialligninger (forsøg ikke at løse flere end 3)
1) $v'(t) = (v(t) + 1)\cos(t)$, find v
2) $y'(x) = y^2 + x$, find y
3) $u''(t) - u'(t) - 12 = e^t$, find u
4) $x''(t) + (t^2 + 1)x'(t) + (1 - t)x(t) = 0$, find x
5) $H'(t) = \sin(t)H(t) + e^{-\cos(t)}$, find H

OPGAVE 2:
Find ligevægtspunkterne og bestem deres stabilitet for differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x-1} - e^{y^2-1} \\ \frac{1}{2}y^2 + 2y + \frac{1}{2}x - 3 \end{pmatrix}.$$

Husk at $e > 1$.

OPGAVE 3:
Find en fundamentalmatrix til differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

OPGAVE 4:
Betragt det ikke-lineære differensligningssystem

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3x_n^{-1} \\ \\ x_n - \frac{1}{2}y_n \end{pmatrix}$$

defineret på mængden $\{(x, y) \mid x > 0\}$.
(a) Vis at systemet har et entydigt fixpunkt på definitionsmængden.
(b) Vis at systemet ikke har nogen løsninger af periode 2 (d.v.s. løsninger med $\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \\ y_n \end{pmatrix}$) som ikke er fixpunkter.
(c) Find den linære approksimation til systemet nær fixpunktet og undersøg det linære systems stabilitet.