Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2003

Matematik 2 DD

Opgave til besvarelse i 3 timer.
Opgavesættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.
NB: Endvidere er der bilagt et Mapleark, *Eksamensbilag*.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 *(ca. 30 points)*

Lad A, Δ, og T være 3×3 matricerne fra Maplearket **Opgave 1**, og betragt differensligningerne

$$\tau \mathbf{x} = A\mathbf{x} \tag{*}$$
$$\tau \mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{h} \tag{**}$$

(a): Find $\mathbf{x}(2)$ for den løsning til (*) som har $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b): Bestem den fuldstændige løsning til (*).

(c): Vis at $\mathbf{x}(t) \to 0$ for $t \to \infty$ for den løsning til (*) som opfylder $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d): Bestem en partikulær løsning til (**) for $\mathbf{h}(t) = (\frac{1}{3})^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 2 *(ca. 40 points)*

Betragt differentialligningssystemet

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - x(x^2 + y^2) \\ x + y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \tag{§}$$

(a): Gør rede for at der findes netop én maksimalløsning til (§) som opfylder $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

(b): Vis at denne løsning er $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

(c): Vis at $(0, 0)$ er ligevægtspunkt.

Opgave 2 fortsættes på side 2

(d): Lad $G(x, y) = x^2 + y^2$. Vis at G opfylder betingelserne i Anderson & Böiers: *Ordinäre differentialekvationer*, Sats 5.3.6 med $\Omega = \mathbb{R}^2$ og $\Omega' = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Hvilken konklusion kan heraf drages?

(e): Vis at en løsning med $(x(0), y(0)) \in \Omega'$ vil forblive inden for Ω' for $t \geq 0$. (Vink: Hvis ikke, må der findes et tidspunkt $t_0 > 0$ så $x(t_0)^2 + y(t_0)^2 = 1$. Sammenhold med (b)!)

Opgave 3 *(ca. 30 points)*

Du kan i denne opgave benytte Maplearkets oplysninger under **Opgave 3**. Lad $L(t, z) = z^2 - z - 2$ og lad $D = \frac{d}{dt}$.

(a): Bestem den fuldstændige løsning til ligningen $L(t, D)y = 0$.

(b): Bestem fundamentalløsningen for operatoren $L(t, D)$.

(c): Udregn $y(1)$ for den løsning til

$$L(t, D)y = e^{-t}$$

som opfylder $y(0) = 0\,, y'(0) = 1$. Der ønskes redegørelse for udregningerne.