Matematik 2 DD

Opgave til besvarelse i 3 timer.
Opgavesættet er på 2 sider og består af 3 opgaver.
NB: Endvidere er der vedhæftet et Mapleark, *Eksamensbilag*.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 *(ca. 40 points)*

Betragt differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y^5 = 0\,. \tag{§}$$

a) Opskriv det tilsvarende førsteordens system på formen

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= \cdots \end{aligned} \tag{§§}$$

b) Gør rede for at $(x_1, x_2) = (0, 0)$ er et ligevægtspunkt.

c) Vis at

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{6}x_1^6 + \frac{1}{2}x_2^2$$

er en liapunovfunktion på $\mathbb{R}^2$ hørende til (§§).

d) Vis at $(0, 0)$ er asymptotisk stabilt ligevægtspunkt for (§§).

e) Vis at enhver løsning til $\overline{y}$ til (§) opfylder

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{y}(t) = \lim_{t\to+\infty} \overline{y}'(t) = 0\,.$$

Opgave 2 *(ca. 30 points)*

Betragt differentialligningen

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9t^4 & \frac{2}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\,, \quad t > 0\,. \tag{$*$}$$

a) Vis at

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{t^3} & e^{-t^3} \\ 3t^2e^{t^3} & -3t^2e^{-t^3} \end{pmatrix}$$

er en fundamentalmatrix til $(*)$.

b) Vis at dersom $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ er en løsning til $(*)$, så er $x_1(t)$ en løsning til

$$t\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 9t^5x = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{$**$}$$

c) Bestem samtlige maksimalløsninger til $(**)$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 *(ca. 30 points)*

Lad A, T, $Diag$ være matricerne og $\mathbf{h}$ vektoren anført i det vedføjede Maple-ark, Eksamenbilag. Specielt gælder altså

$$A = T\,Diag\,T^{-1}\,.$$

Du må i det følgende benytte alle oplysninger som fremgår af Eksamensbilag.

Betragt differensligningen

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{h}\,. \tag{Δ}$$

a) Gør rede for at systemet er asymptotisk stabilt.

b) Vis at enhver løsning til det homogene system

$$\mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t)$$

kan skrives på formen

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left(\frac{1}{4}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 \left(\frac{1}{5}\right)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

c) Vis, at dersom $\mathbf{x}(t)$ er en løsning til det inhomogene system, så gælder at

$$\mathbf{x}(t) \to \begin{pmatrix} \frac{41}{10} \\ \frac{19}{5} \\ \frac{83}{10} \end{pmatrix} \quad \text{for } t \to \infty\,.$$