Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 2000

Matematik 2DD

3 timers skriftlig prøve.

Opgavesættet består af 4 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen. Opgavesættet er på 1 side.

Opgave 1

Lad f, g, h være C^1-funktioner. Vis, at differentialligningen (for funktionen $x = x(t)$),

$$x' = g\big(x + f(t)\big)\,h(t) - f'(t),$$

ved substitutionen $z(t) := x(t) + f(t)$ overføres i en separabel differentialling. Løs ved hjælp af denne observation de to efterfølgende differentialligninger:

$$x' = 2(x+t)^2 t - 1.$$

$$x' = te^x - 1/t \text{ for } t > 0.$$

Opgave 2

Betragt den inhomogene differentialligning,

$$x'' - \frac{1}{t}x' - t^2 x = t^2 e^{t^2/2} \qquad \text{for } t > 0.$$

Vis, at funktionerne $e^{t^2/2}$ og $e^{-t^2/2}$ er løsninger til den tilsvarende homogene ligning. Bestem den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning.

Opgave 3

Betragt i $\mathbb{R}^2$ det autonome differentialligningssystem,

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + x_1 + e^{2x_2} \\ -5 - 4x_1 + 5e^{-x_2} \end{pmatrix}.$$

Find eventuelle ligevægtspunkter, og undersøg stabilitetsforholdene.

Opgave 4

Løs i $\mathbb{R}^3$ følgende differensligning med begyndelsesbetingelse:

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$