Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990–91

Matematik 2 AS

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Sættet består af 5 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal angivet. For at bestå eksamen er et samlet pointtal på mindst 55 nødvendig.

Som hjælpemidler må medbringes noter, bøger og opgavebesvarelser.

Opgave 1 (20p)

(1) Beregn en største fælles divisor af $(11 + 3i)$ og $(3 + 2i)$ i ringen $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$.
(2) Undersøg om elementet $1 + 3\sqrt{-3}$ er irreducibelt i ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Opgave 2 (20p)

Lad G være en gruppe, $x \in G$.
Sæt

$$C^*_G(x) = \left\{g \in G \mid gxg^{-1} \in \{x, x^{-1}\}\right\}.$$

(1) Vis, at $C^*_G(x)$ er en undergruppe i G.

(2) Betragt elementet $(1,2,3,4) \in S_4$. Angiv alle elementer i $C^*_{S_4}(1,2,3,4)$ og deres fortegn.

Opgave 3 (20p)

Lad R og S være kommutative ringe af $\varphi\colon R \to S$ en ringhomomorfi. Lad $a \in R$ og sæt

$$\ker_a \varphi = \{r \in R \mid \varphi(ar) = 0\}.$$

(1) Vis, at $\ker_a \varphi$ er et ideal i R, som indeholder $\ker \varphi$.

(2) Vis, at hvis $a \mid b$ (i R) gælder

$$\ker_a \varphi \subseteq \ker_b \varphi .$$

(3) Lad φ være homomorfien fra $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ defineret ved $\varphi(r) = \hat{r}$.
Beregn $\ker_2 \varphi$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990–91
Matematik 2 AS

Opgave 4 (20p)

Lad K være legemet $\mathbb{Z}_{11}$ og lad $f(t) = t^3 + \hat{1} \in K[t]$.

(1) Beregn alle rødder for $f(t)$ i K.

(2) Afgør om K er et spaltningslegeme for $f(t)$.

Opgave 5 (20p)

Betragt $(\mathbb{Z}, +)$ som abelsk gruppe. Lad $k \in \mathbb{Z}$ være valgt. Vi definerer en ny komposition $\mathbb{S}$ på $\mathbb{Z}$ ved:

For alle $a, b \in \mathbb{Z}$ er $a\mathbb{S}b = a + b + k$.

(1) Vis, at $(\mathbb{Z}, \mathbb{S})$ er en gruppe.

(2) Vis, at der ved

$$\psi(a) = a - k \qquad (a \in \mathbb{Z})$$

defineres en gruppeisomorfi fra $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, \mathbb{S})$.