Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1990

Matematik 2 AS

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Sættet består af 6 opgaver. Ved hver opgave er et pointtal angivet. For at bestå eksamen er et samlet pointtal på mindst 55 nødvendig.

Som hjælpemidler må medbringes noter, bøger og opgavebesvarelser.

Opgave 1 (16p)

Lad R være restklasseringen $\mathbb{Z}_8$.
Betragt polynomiet

$$p(t) = t^3 - t^2 + t + \hat{2} \in R[t] .$$

(1) Vis, at $p(t)$ netop har én rod $\hat{a} \in R$.

(2) Angiv et polynomium $q(t) \in R[t]$, således at

$$p(t) = (x - \hat{a})q(t) .$$

Opgave 2 (18p)

Lad $n \in \mathbb{N}$ og lad $G =< x >$ være en cyklisk gruppe af orden $|G| = |x| = n$.

(1) Lad p være et primtal, så $p \mid n$. Vis, at G indeholder netop $p - 1$ elementer af orden p.

(2) Lad $n = 50$. Beregn antallet af elementer af orden 25 og af orden 50 i G.

Opgave 3 (16p)

Lad R og S være integritetsringe og $\varphi : R \to S$ en ring-monomorfi. Vis, at der ved

$$\tilde{\varphi}([r, s]) = [\varphi(r) , \varphi(s)]$$

defineres en monomorfi mellem R's brøklegeme $Q(R)$ og S's brøklegeme $Q(S)$.
(Bemærkning: Først bør det vises, at $\tilde{\varphi}$ er veldefineret.)

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 (16p)

Lad R være den euklidiske ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

(1) Bestem alle elementer $x \in R$ med norm $N(x) = 11$.

Lad nu $x \in R$ have norm 11 og lad I være et ideal i R, som indeholder x. Vis

(2) $11 \in I$.

(3) Hvis I er et maksimalt ideal i R, så er R/I et legeme af karakteristik 11.

Opgave 5 (18p)

Betragt følgende permutationer i den symmetriske gruppe S_7.

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Skriv π, κ og $\pi\kappa$ som produkt af disjunkte cykler og beregn deres fortegn.

(2) Lad $k, l \in \mathbb{N}$. Vis, at $\pi^k\kappa^l$ er en lige permutation, hvis $k + l$ er et lige tal (altså $k + l \equiv_2 0$).

(3) Angiv et element $\rho \in S_7$ så

$$\rho\pi\rho^{-1} = \kappa .$$

Opgave 6 (16p)

Lad I og J være idealer i en (ikke-kommutativ) ring R. Antag:

For alle $a_1, a_2 \in I$ gælder $a_1a_2 = 0$.

For alle $b_1, b_2 \in J$ gælder $b_1b_2 = 0$.

Lad K være idealet $I + J$ i R. Vis

(1) For alle $c_1, c_2, c_3 \in K$ gælder $c_1c_2c_3 = 0$.

(2) Hvis yderligere $I \cap J = \{0\}$ gælder $c_1c_2 = 0$ for alle $c_1c_2 \in K$.