Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999-2000

Matematik 2 AN

(nyt og gammelt pensum)

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (30 points)

Lad M være delmængden af $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$M = \{(x, \frac{1}{n}) \mid x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

M består altså af en forening af visse rette linier som er parallelle med x-aksen. Vi udstyrer $\mathbb{R}^2$ med sin sædvanlige metrik.

a) Vis at ethvert punkt $(x, 0)$ på x-aksen tilhører M's afslutning $\overline{M}$.

Det oplyses at $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}$.

b) Benyt dette til at vise, eller vis på anden måde, at

$$\overline{M} = M \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Vi betragter nu $\overline{M}$ som metrisk delrum af $\mathbb{R}^2$.

c) Gør rede for at enhver cauchyfølge i $\overline{M}$ er konvergent i $\overline{M}$.

d) Vis at M er en åben, overalt tæt delmængde af $\overline{M}$ med hensyn til delrumsmetrikken.

Opgave 2 (20 points)

Lad M være mængden $M = \big\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ betragtet som metrisk delrum af $(\mathbb{R}^2, d)$, hvor d er den sædvanlige metrik.

a) Gør rede for at M er kompakt.

Betragt funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0.0). \end{cases}$$

b) Vis at f er kontinuert.

c) Gør rede for at der findes $\delta > 0$ således at for alle (x_1, y_1) og (x_2, y_2) i M gælder $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{1}{10000}$, når blot $d((x_1, y_1)\,,\ (x_2, y_2)) < \delta$.

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (20 points)

Betragt problemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad (x,t) \in]0,\pi[\times]0,+\infty[\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad t \in [0,+\infty[\\ u(x,0) = \sin^2(x)\,, \quad x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

a) Gør rede for at problemet har en kontinuert løsning $u\colon [0,\pi] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

b) Det oplyses, at

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x)\sin(nx)dx = \begin{cases} \dfrac{-8}{\pi}\dfrac{1}{n(n^2-4)} & , \quad \text{for } n \text{ ulige} \\ 0 & , \quad \text{for } n \text{ lige.} \end{cases}$$

Opskriv et rækkeudtryk for løsningen u.

c) Lad $g(x) = u(x,1)$ og lad $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(nx)dx$. Vis at

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{-8}{\pi}\dfrac{1}{n(n^2-4)}e^{-n^2} & , \quad \text{for } n \text{ ulige} \\ 0 & , \quad \text{for } n \text{ lige.} \end{cases}$$

Opgave 4 (30 points)

Lad

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [0, \frac{\pi}{2}] \\ -1\,, & x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[. \end{cases}$$

a) Gør rede for at fourierrækken for f er punktvis konvergent på $[-\pi,\pi[$.

b) Bestem sumfunktionens værdi for ethvert $x \in [-\pi,\pi[$.

c) Lad $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n \in \mathbb{Z})$.
Gør rede for at

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = 1.$$

d) Lad

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Er følgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformt konvergent? Begrund dit svar.