Matematik 2 AN

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 3 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1 (30 points)

Lad H være hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{N})$ med det sædvanlige indre produkt givet som

$$((a_n),\ (b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n.$$

Lad $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være den sædvanlige ortonormalbasis $e_n = (\delta_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$, hvor

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{for } k = n \\ 0 & \text{for } k \neq n. \end{cases}$$

1. Vi definerer et system, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, af vektorer i H ved

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2), \qquad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$$
$$f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4), \qquad f_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_4)$$

   og generelt for $k \in \mathbb{N}$

$$f_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2k-1} - e_{2k}), \qquad f_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{2k-1} + e_{2k}).$$

   Vis, at $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er en ortonormalbasis for H.

2. Lad $X = \overline{\operatorname{span}\{f_{2k} | k \in \mathbb{N}\}}$ og lad $x_0 \in H$ være følgen $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots)$. Bestem ortogonalprojektionen af x_0 på X.
3. Idet det oplyses at $\|x_0\|^2 = \frac{\pi^2}{6}$, skal du vise at

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k-1}{(2k-1)(2k)} \right)^2 \leq \frac{\pi^2}{3}.$$

 Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2 (35 points)

Betragt rækken

$$\frac{-8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}e^{-2((2n-1)\pi)^2 t}\sin((2n-1)\pi x).$$

1. Gør rede for, at rækken er uniformt konvergent på den øvre halvplan, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$.
2. Lad $u : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ betegne sumfunktionen på halvstrimlen $[0,1] \times [0,+\infty[$. Gør rede for at på enhver åben halvstrimmel $]0,1[\times]\varepsilon,+\infty[$, $\varepsilon > 0$, har u partielle afledede $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, og at disse kan beregnes ved ledvis differentiation.
3. Vis dernæst, at u tilfredsstiller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

4. Lad $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ være givet som

$$f(x) = u(x,0).$$

Vis, at $f(x) = x(x-1)$.

Opgave 3 (35 points)

Lad $M =]0,1]$ og lad d være den sædvanlige metrik på M, $d(x,y) = |x-y| \quad (x,y \in M)$. Vi betragter endvidere afbildningen $\widetilde{d} : M \times M \to \mathbb{R}$ givet ved

$$\widetilde{d}(x,y) = \left|\frac{x-y}{xy}\right|, \quad (x,y \in M).$$

1. Gør rede for, at $\widetilde{d}$ er en metrik på M.
2. Vis, at afbildningen $x \to \frac{1}{x}$ er en isometri af $(M,\widetilde{d})$ på $[1,+\infty[$, når $[1,+\infty[$ udstyres med den sædvanlige metrik.
3. Gør herved, eller på anden vis, rede for at $(M,\widetilde{d})$ er fuldstændigt.
4. Vis, at den identiske afbildning $x \to x : (M,\widetilde{d}) \to (M,d)$ er uniformt kontinuert.
5. Vis, at den identiske afbildning $x \to x : (M,d) \to (M,\widetilde{d})$ er kontinuert men *ikke* uniformt kontinuert.