Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1997-1998

Matematik 2 AN

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 3 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1

Lad, for $\alpha > 0$ og $a \in \mathbb{R}$, $A_{a,\alpha}$ og $B_{a,\alpha}$ betegne delmængderne af $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$A_{a,\alpha} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\,,\ y \leq a + \frac{1}{x^\alpha}\}$$
$$B_{a,\alpha} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\,,\ y \geq a - \frac{1}{x^\alpha}\}.$$

I det følgende udstyres $\mathbb{R}^2$ med sædvanlig metrik.

a) Vis, at $A_{a,\alpha}$ og $B_{a,\alpha}$ er afsluttede delmængder af $\mathbb{R}^2$ for alle $\alpha > 0$ og $a \in \mathbb{R}$.

b) Bestem, for givet $\alpha > 0$, de par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, for hvilke $A_{a,\alpha} \cap B_{b,\alpha}$ er en kompakt delmængde af $\mathbb{R}^2$.

c) Definer funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x,y) = xy\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

og lad $A_{0,\alpha} = A_\alpha$ og $B_{0,\alpha} = B_\alpha$.

Begrund, at f er kontinuert på $A_\alpha \cap B_\alpha$ for alle $\alpha > 0$, og at f er uniformt kontinuert på $A_\alpha \cap B_\alpha \cap ([1,c] \times \mathbb{R})$ for alle $\alpha > 0$, $c > 1$.

d) Vis, at f er uniformt kontinuert på $A_\alpha \cap B_\alpha$ for $\alpha > 1$, men ikke for $\alpha = 1$.

Opgave 2

Lad H betegne Hilbert rummet $L_2([0,\pi])$ med indre produkt givet ved

$$(f,g) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}\,dx\,,\ f,g \in H,$$

hvis tilhørende norm betegnes $\|\cdot\|$. Lad endvidere $(e_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ være ortonormalbasen for H givet ved $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e_n(x) = \cos nx$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,\pi]$.

a) Vis, at rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e_n$$

Opgave 2 fortsættes på side 2 .

er konvergent i H. Dens sum betegnes f.

b) Beregn $(f, \cos^3)$, (hvor $\cos^3$ betegner funktionen $x \to (\cos x)^3$ på $[0, \pi]$).

c) Begrund, at der findes en unitær operator U på H, således at $Ue_0 = \| \cos^3 \|^{-1} \cos^3$.

d) Lad U være som i c). Bestem $U^* \cos^3$ og vis, at $U^*(X) = \overline{\text{span}\{e_1, e_2, \dots\}}$, hvor $X = \{\cos^3\}^\perp$.

Opgave 3

Lad funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være periodisk med periode 2π og givet på $[-\pi, \pi[$ ved

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

a) Skitser grafen for f i $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Beregn de trigonometriske Fourier koefficienter og opstil Fourier rækken for f.

c) Vis, at Fourier rækken for f er uniformt konvergent i $\mathbb{R}$ med sumfunktion f.

Lad $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den periodiske funktion med periode 2π, der er givet ved

$$g(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [-\pi, 0] \\ -e^{-x}, & x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

d) Begrund, at Fourier rækken for g er punktvis konvergent i $\mathbb{R}$, og bestem dens sum i $x = \pi$ og i $x = \frac{3\pi}{2}$. (Fourier rækken for g kræves ikke bestemt.)

e) Afgør, hvorvidt Fourier rækken for g er uniformt konvergent i $\mathbb{R}$.