Matematik 2 AN

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1

a) Lad (M,d) være et metrisk rum og $f: X \to M$ en injektiv afbildning fra en mængde X ind i M. For $x_1, x_2 \in X$ sættes

$$d_f(x_1, x_2) = d\left(f(x_1), f(x_2)\right) .$$

Vis, at d_f er en metrik i X og at $f: (X, d_f) \to (M, d)$ er en kontinuert afbildning.

b) Lad nu (M,d) være $\mathbb{R}$ med sædvanlig metrik og $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, og lad $f: X \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 . \end{cases}$$

Vis, at X er kompakt betragtet som delrum af $\mathbb{R}$, men at (X, d_f) ikke er kompakt.

c) Vis, med betegnelser som i a), at hvis (M,d) er kompakt, og $f(X)$ er en afsluttet delmængde af M, da er (X, d_f) kompakt.

Opgave 2

a) For $n \in \mathbb{Z}$ betegnes med e_n funktionen givet ved

$$e_n(x) = e^{inx}, \quad x \in [-\pi, \pi] .$$

Vis, at der ved fastsættelsen

$$(Ae_n)(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2+1} e_n(x) & \text{for } n \neq 0, \quad x \in [-\pi, \pi] \\ \\ 1/2 & \text{for } n = 0, \quad x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

entydigt defineres en begrænset operator A på $L_2([-\pi, \pi], \frac{1}{2\pi})$.

b) Bestem samtlige egenværdier og tilhørende egenrum for A. Bestem $\|A\|$.

c) Begrund, at A er selvadjungeret.

d) Bestem en funktion $f \in L_2([-\pi, \pi])$ således, at

$$(Af)(x) = \cos x \sin^2 x , \quad x \in [-\pi, \pi] .$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være periodisk med periode 2π og givet på $[-\pi, \pi[$ ved

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{for } -\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{\pi}x^2 & \text{for } 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

Det oplyses, at Fourier koefficienterne $c_n(f)$, $n \neq 0$, er givet ved

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{3(-1)^n - 1}{n^2} + \frac{i}{\pi^2}\,\frac{1-(-1)^n}{n^3}\,.$$

a) Skitser grafen for f i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$. Bestem $c_0(f)$ og opskriv Fourier rækken for f.

b) Begrund, at Fourier rækken for f er punktvis konvergent på $\mathbb{R}$, og bestem dens sumfunktion.

Afgør, hvorvidt rækken er uniformt konvergent.

c) Vis ved indsættelse af en passende værdi af den variable i Fourier rækken for f, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-(-1)^n}{n^2} = \frac{7\pi^2}{12}\,.$$

d) Lad funktionen g på $\mathbb{R}$ være givet ved

$$g(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{for } x \notin \{p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & \text{for } x \in \{p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}\,. \end{cases}$$

Begrund, at Fourier rækken for g er punktvis konvergent på $\mathbb{R}$, og bestem dens sumfunktion. (Fourier rækken for g kræves ikke bestemt.)

Opgave 4

Lad $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(\theta) = \begin{cases} \sin 2\theta & \text{for } 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{for } -\pi \leq \theta < 0\,. \end{cases}$$

a) Bestem Fourier rækken for f.

b) Bestem en løsning til problemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{for } x^2 + y^2 < 2$$

$$u(x,y) = \begin{cases} xy & \text{for } y \geq 0,\ x^2+y^2 = 2 \\ 0 & \text{for } y < 0,\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

på rækkeform i polære koordinater (r, θ), og begrund, at den angivne række konvergerer uniformt på $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$.

c) Vis, at $u(0,y) = 0$ for $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$.