Matematik 2 AN

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1

Lad (X,d_X) og (Y,d_Y) være to metriske rum og $f:X\to Y$ en kontinuert afbildning.

a) Vis, at hvis $x\in X$ er fortætningspunkt for følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i X, da er $f(x)$ fortætningspunkt for følgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ i Y.

b) Vis, at hvis $x\in X$ er fortætningpunkt for følgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i X, da er (x,x) fortætningspunkt for følgen $((x_n,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ i produktrummet $X\times X$.

c) Lad $X=Y=\mathbb{R}$ udstyret med sædvanlig metrik og lad talfølgerne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være givet ved

$$x_n=\begin{cases} n\,, & \text{hvis } n \text{ er lige}\\ 0\,, & \text{hvis } n \text{ er ulige}\,,\end{cases}\qquad y_n=\begin{cases} n\,, & \text{hvis } n \text{ er ulige}\\ 0\,, & \text{hvis } n \text{ er lige}\,.\end{cases}$$

Eftervis, at hver af følgerne $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ har et fortætningspunkt, men at følgen $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ i $\mathbb{R}^2$ ikke har noget fortætningspunkt.

Opgave 2

Lad H betegne Hilbert rummet $L_2([0,\pi])$ med indre produkt givet ved

$$(f,g)=\int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}\,dx\,,\qquad f,g\in H\,.$$

Lad endvidere $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betegne ortonormalbasen for H givet ved $e_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$, $x\in[0,\pi]$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Bestem konstanterne a_1, $a_2\in\mathbb{C}$, således at størrelsen

$$\int_0^\pi |a_1\sin x+a_2\sin 2x-\cos x|^2\,dx$$

er mindst mulig.

b) Vis, at der findes en entydigt bestemt unitær operator $U\in\mathcal{B}(H)$, således at

$$Ue_n=\begin{cases} e_{n+1}\,, & \text{hvis } n \text{ er ulige.}\\ -e_{n-1}\,, & \text{hvis } n \text{ er lige.}\end{cases}$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

c) Vis, at $U^2 = -I_H$, og bestem U^*.

d) Beregn funktionen $g = Uf$, hvor $f \in H$ er givet ved $f(x) = (\sin x)^3$, $x \in [0, \pi]$.

Opgave 3

Lad funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right] - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

hvor vi med $[a]$ betegner det største hele tal, som er mindre end eller lig med a, for $a \in \mathbb{R}$.

a) Vis, at f er stykkevis glat og periodisk med periode 2π, og skitsér dens graf i intervallet $[-4\pi, 4\pi]$.

b) Beregn de trigonometriske Fourier koefficienter og opstil Fourier rækken for f.

c) Vis, at Fourier rækken for f er punktvis konvergent i $\mathbb{R}$, og afgør, hvorvidt den er uniformt konvergent.

Lad $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være den periodiske funktion med periode 2π, der er givet ved

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt \text{ for } x \in [0, 2\pi[\,.$$

d) Bestem den trigonometriske Fourier række for g og vis, at den er uniformt konvergent i $\mathbb{R}$ med g som sumfunktion.

Opgave 4

Vi betragter problemet

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

a) Gør rede for, at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sin n\pi x$$

er uniformt konvergent i $\mathbb{R}$ og at sumfunktionen f er kontinuert samt at $f(0) = f(1) = 0$.

Det oplyses (og skal altså ikke vises), at f ydermere er stykkevis glat.

b) Angiv en løsning til $(*)$ på rækkeform, som opfylder $u(x,0) = f(x)$ for $x \in [0,1]$.

Opgave 4 fortsættes på side 3

c) Begrund, at ovennævnte løsning u har en størsteværdi på rektanglet $[0,1]\times[0,T]$ for ethvert $T>0$.

d) Vis, at der findes en konstant $K>0$, således at

$$|u(x,t)| \leq K e^{-\pi^2 T} \quad \text{for} \quad x\in[0,1] \quad \text{og} \quad t\geq T\,,$$

og benyt dette til at vise, at løsningen u har en størsteværdi på strimlen $[0,1]\times[0,+\infty[$.