Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1996

Matematik 2 AN

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) betegne metriske rum. En kontinuert funktion $f : X \to Y$ siges at være *egentlig*, hvis det for enhver kompakt delmængde K af Y gælder, at $f^{-1}(K)$ er en kompakt delmængde af X.
Vi udstyrer i det følgende $\mathbb{R}^n$ med den sædvanlige metrik.

a) Lad X være den afsluttede kugle i $\mathbb{R}^n$ med centrum i 0 og radius 1 og antag at $f : X \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Vis, at f er egentlig.

b) Antag, at $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Vis, at f er egentlig hvis og kun hvis

$$f^{-1}([-m, m])$$

er begrænset for ethvert $m \in \mathbb{N}$.

c) Betragt funktionerne $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, givet ved

$$f_1(x) = 0\,, \qquad f_2(x) = |x|\,, \qquad f_3(x) = e^x\,.$$

Afgør, hvilke af disse funktioner der er egentlige.

Opgave 2

Lad de reelle funktioner f og g være defineret på $\mathbb{R}$, således at

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\pi \le \theta < 0 \\ \sin\theta & \text{for} \quad 0 \le \theta < \pi \end{cases}, \qquad g(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad -\pi \le \theta < 0 \\ \cos\theta & \text{for} \quad 0 \le \theta < \pi \end{cases},$$

og således at f og g er periodiske med periode 2π.

a) Skitser graferne for f og g i intervallet $[-3\pi, 3\pi]$, beregn Fourier koefficienterne $c_n(f)$ og $c_n(g)$ for f og g og opskriv de tilhørende Fourier rækker.

b) Vis, at begge rækker er punktvis konvergente i $\mathbb{R}$, og afgør i begge tilfælde, hvorvidt de er uniformt konvergente i $\mathbb{R}$.

c) Find summen af Fourier rækken for g i $\theta = -\pi$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

a) Bestem sinus-rækken for funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2\pi x & \text{for} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ -\sin 2\pi x & \text{for} \quad \dfrac{1}{2} < x \le 1\,, \end{cases}$$

og vis, at denne række er uniformt konvergent på $[0, 1]$.

b) Bestem en rækkefremstilling af løsningen til problemet

$$(*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < 1\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x)\,, \quad x \in [0,1]\,. \end{cases}$$

Gør rede for, at denne række er uniformt konvergent på $[0, 1] \times [0, +\infty[$.

Opgave 4

Lad vektorerne a og b i Hilbertrummet $\ell_2(\mathbb{N})$ være givet ved

$$a = (1, 0, 0, \dots)\,, \qquad b = (b_1,\, b_2,\, b_3, \dots)\,,$$

hvor $b_1 = 0$ og $b_n = 2^{-\frac{1}{2}(n-1)}$ for $n \ge 2$.

a) Vis, at a og b udgør et ortonormalsystem i $\ell_2(\mathbb{N})$ og find den ortogonale projektion af vektoren $(1, 1, 1, 0, 0, \dots)$ på $\operatorname{span}\{a, b\}$.

Lad A være operatoren på $\ell_2(\mathbb{N})$ givet ved

$$A(x_1,\, x_2,\, x_3, \dots) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1,\, x_1,\, x_2,\, x_2,\, x_3,\, x_3, \dots)\,.$$

b) Vis, at A er en isometri, d.v.s. $\|Ax\| = \|x\|$ for alle $x \in \ell_2(\mathbb{N})$. Er A unitær?

c) Vis, at A ikke har nogen egenvektorer.

d) Bestem den adjungerede operator A^* og afgør, hvorvidt A er selvadjungeret.