Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2003

Matematik 2 AN

Opgavesæt til besvarelse i 3 timer.
Opgavesættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1 *(ca. 20 points)*

Lad $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være en vilkårlig afbildning fra enhedsintervallet ind i de reelle tal.

(a): Vis at der ved

$$\rho(x,y) = |x-y| + |f(x) - f(y)|\,, \quad x,y \in [0,1]$$

defineres en metrik på $[0,1]$.

(b): Vis at $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, når $[0,1]$ er udstyret med metrikken ρ og $\mathbb{R}$ har sin sædvanlige metrik.

Opgave 2 *(ca. 30 points)*

I denne opgave er $\mathbb{R}^3$ udstyret med sin sædvanlige metrik. Betragt delmængderne

$$A = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \le z\} \text{ og } B = \{(x,y,z) \mid z \le 1\}.$$

(a): Vis at A er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^3$.

(b): Vis at $A \cap B$ er en kompakt delmængde af $\mathbb{R}^3$.

(c): Vis at der findes $(x_0, y_0, z_0) \in A \cap B$ så

$$x + y - z \le x_0 + y_0 - z_0$$

for alle $(x,y,z) \in A \cap B$.

Opgave 3 *(ca. 30 points)*

Lad $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ være fourierrækken for funktionen $f(x) = x^4\,,\ x \in [-\pi,\pi]$.

(a): Gør rede for at $b_n = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og at rækken er uniformt konvergent.

(b): Vis at den afledede funktion $f'(x) = 4x^3\,,\ x \in [-\pi,\pi]$ har fourierrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} -n a_n \sin nx\,.$$

(c): Vis v.hj.a. Parsevals ligning formlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 = \frac{32}{7}\pi^6.$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 4 *(ca. 20 points)*

Betragt hilbertrummet ℓ_2 med sædvanligt skalarprodukt. Lad $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ med $|\alpha| < 1$ og lad for hvert $n \in \mathbb{N}$

$$x_n = (\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

være den vektor i ℓ_2 som har α^i på i'te koordinat for $i \leq n$ og 0 på alle andre pladser.

(a): Vis at følgen (x_n) er konvergent i ℓ_2.

(b): Lad $x = \lim_n x_n$ og lad $y = (-1, \frac{1}{\alpha^*}, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Vis at $x \perp y$.