Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 2002-2003

Matematik 2 AN, Gammelt Pensum

Opgavesæt til besvarelse i 3 timer.

Sættet er på 2 sider og består af 4 opgaver.
Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte.

Det må uden bevis bruges at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ *er konvergent med sum* $\frac{\pi^2}{8}$.

Opgave 1 (30 points)

Lad $A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$.

(1) Vis at A er en afsluttet delmængde af $\mathbb{R}^2$ med den sædvanlige metrik.
(2) Vis at det indre A° er tomt.
(3) Er A kompakt? Er A fuldstændigt? Svarene skal begrundes.

Opgave 2 (20 points)

Lad (M, d) være et metrisk rum og lad (a_n) være en konvergent følge i M med $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Definér funktionen $f\colon M \to \mathbb{R}$ og for hvert $n \in \mathbb{N}$ funktionerne $f_n\colon M \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = d(a, x) \;\text{ og } f_n(x) = d(a_n, x) \text{ for alle } x \in M.$$

(1) Vis at $|f_n(x) - f(x)| \leq d(a_n, a)$ for alle $x \in M,\ n \in \mathbb{N}$.
(2) Vis at $f_n \to f$ uniformt.

Opgave 3 (30 points)

Betragt fourierrækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin(nx),\ x \in [-\pi, \pi]$.

(1) Gør rede for at rækken er uniformt konvergent og at sumfunktionen, f, er kontinuert.
(2) Vis at $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(t)\, dt = 0$.
(3) Lad $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt,\ x \in [-\pi, \pi]$. Vis at $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(nt)\, dt = -\frac{1}{n(2n-1)^2}$ for $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 4 (20 points)

Vi betragter i denne opgave ℓ_2 udstyret med det sædvanlige skalarprodukt. Lad $x_n = \frac{1}{2n-1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(1) Vis at $(x_n) \in \ell_2$ og bestem $\|(x_n)\|_2$.
(2) Med (x_n) som i ovenstående, lad $X = \{(x_n)\}^\perp$. Lad endvidere $y_1 = y_2 = 1$ og $y_n = 0$ for $n \geq 3$. Bestem ortogonalprojektionen af (y_n) på X.

/LK