

Matematik 2AN

3 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregner.)

Opgavesættet består af 3 opgaver og er på 3 sider. Det er dækkende for både nyt og gammelt pensum.

Opgave 1

Betragt problemet

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u(x, \pi) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi \\ u(x, 0) = \sin^3 x, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{array} \right.$$

- Gør rede for at problemet har en kontinuert løsning på $[0, \pi] \times [0, \pi]$.
- Bestem denne løsning.
- Lad $g(x) = u(x, \frac{\pi}{2})$. Bestem for hvert $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin nx \, dx.$$

Opgave 2

Lad $C([0, 1], \mathbb{C})$ betegne banachrummet af kontinuerte komplekse funktioner på intervallet $[0, 1]$ med normen $\|f\|_u = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$.

Lad endvidere $\Delta = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x \neq y\}$.

Betragt for hvert $(x, y) \in \Delta$ afbildningen $\Phi_{x,y} : C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ givet ved

$$\Phi_{x,y}(f) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

- Gør rede for at en funktion $f \in C([0, 1], \mathbb{C})$ er en lipschitzafbildning med lipschitzkonstant $C > 0$, hvis og kun hvis

$$|\Phi_{x,y}(f)| \leq C$$

for alle afbildningerne $\Phi_{x,y}$, $((x,y) \in \Delta)$, altså hvis og kun hvis

$$f \in \bigcap_{(x,y) \in \Delta} \{g \mid |\Phi_{x,y}(g)| \leq C\}.$$

b) Vis uligheden

$$|\Phi_{x,y}(f) - \Phi_{x,y}(g)| \leq \frac{2}{|x-y|} \|f - g\|_u,$$

gældende for alle $(x,y) \in \Delta$ og alle $f, g \in C([0,1], \mathbb{C})$, og gør rede for at enhver afbildning $\Phi_{x,y}$, $((x,y) \in \Delta)$ er kontinuert.

c) Vis ved brug af b), at

$$\{f \in C([0,1], \mathbb{C}) \mid |\Phi_{x,y}(f)| \leq C\}$$

er afsluttet for ethvert $C > 0$ og ethvert $(x,y) \in \Delta$.

d) Vis ved brug af a) og c), at for ethvert $C > 0$ er mængden

$$\{f \in C([0,1], \mathbb{C}) \mid f \text{ er en lipschitzafbildning med lipschitzkonstant } C\}$$

afsluttet i $C([0,1], \mathbb{C})$.

Opgave 3

Lad H betegne hilbertrummet $L_2([-\pi, \pi], \frac{1}{2\pi})$ og lad $e_n(x) = e^{inx}$, $(x \in [-\pi, \pi], n \in \mathbb{Z})$ være den sædvanlige ortonormalbasis.

Lad

$$H_{ev} = \{f \in H \mid (f, e_n) = (f, e_{-n}) \text{ for alle } n = 0, 1, 2, \dots\}$$

og

$$H_{od} = \{f \in H \mid (f, e_n) = -(f, e_{-n}) \text{ for alle } n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

a) Gør rede for, at

$$e_n + e_{-n} \in H_{ev}$$

og

$$e_n - e_{-n} \in H_{od}$$

for alle $n = 0, 1, 2, \dots$

b) Lad $f \in H_{ev}$ og $g \in H_{od}$.

Vis, at

$$f = (f, e_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} (f, e_n)(e_n + e_{-n})$$

og

$$g = \sum_{n \in \mathbb{N}} (g, e_n)(e_n - e_{-n}).$$

c) Vis, at

$$H_{ev} \subseteq H_{od}^\perp$$

og

$$H_{od} \subseteq H_{ev}^\perp.$$

d) Bestem orthogonalprojektionen af funktionen $\sin x + \sin^2 x$ på H_{ev} .